Д. Киндерлерер
Г. Стампаккья

ВВЕДЕНИЕ В ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО * МИР *

PURE AND APPLIED MATHEMATICS
A Series of Monographs and Textbooks

AN INTRODUCTION TO VARIATIONAL INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS

DAVID KINDERLEHRER

School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota

GUIDO STAMPACCHIA †

Scuola Normale Superiore
Pisa

1980

ACADEMIC PRESS

A Subsidiary of Harcourt
Brace Jovanovich, Publishers

NEW YORK LONDON TORONTO
SYDNEY SAN FRANCISCO

Д. Киндерлерер
Г. Стампаккья

ВВЕДЕНИЕ В ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Перевод с английского
Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВА
и А. В. ФУРСИКОВА
под редакцией
В. М. ТИХОМИРОВА

Москва «Мир» 1983

ББК 22.161.8
К 41
УДК 517+519.3

Киндерлерер Д., Стампаккья Г.
Введение в вариационные неравенства и их приложения. Пер. с англ. — М: Мир, 1983. 256 с., ил.

Написанное известными математиками (США, Италия) введение в интенсивно развивающуюся и имеющую многочисленные приложения теорию вариационных неравенств. Эта тематика примыкает к теории оптимального управления с распределенными параметрами и теории уравнений математической физики.
Для математиков, механиков, физиков, студентов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{1702050000-251}{041(01)-83}$ 4—83, ч. 1

Давид Киндерлерер, Гвидо Стампаккья

Ст. научный редактор Н. И. Плужникова. Мл. научный редактор Т. А. Денисова. Художник Е. К. Самойлов. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Н. И. Борисова. Корректор Н. Н. Яковлева

ИБ № 3251

Сдано в набор 07.09.82. Подписано к печати 28.10.83. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 8,00 бум. л. Усл. печ. л. 16,00. Усл. кр.-отт. 16,00. Уч.-изд. л. 14,60. Изд. № 1/1989. Тираж 6000 экз. Зак. 864. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Мир», 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А.М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15. Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория вариационных неравенств возникла сравнительно недавно, однако за последнее десятилетие она привлекла внимание очень многих исследователей. Ныне эта теория переживает период бурного и интенсивного развития.

Простейшая содержательная модельная задача, которая приводит к вариационным неравенствам, — это задача о кратчайшем пути, соединяющем две заданные точки на плоскости и обходящем некоторые препятствия. Этот кратчайший путь распадается на две части: на участки прямолинейного движения, где он подходит к препятствию или сходит с него, и участки, где приходится идти по границе препятствия.

В теории вариационных неравенств исследуются многомерные обобщения такого рода проблем минимизации. Функция, доставляющая минимум в многомерной задаче, также имеет, вообще говоря, участки примыкания к границе, а вне таких участков она удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными — уравнению Эйлера соответствующей вариационной проблемы. Таким образом, дело сводится к решению уравнения с частными производными со свободной границей, ибо граница области примыкания заранее неизвестна. Такие ситуации характерны для многих проблем физики и механики. Множество приложений задачи со свободной границей находят в инженерном деле — при расчете плотин, двигателей и разнообразных механизмов. Теория вариационных неравенств для многих проблем такого рода (как правило, тех, где так или иначе присутствует выпуклость) дает общую методику их решения. Эта теория создавалась на стыке многих актуальных областей — вариационного исчисления, выпуклого анализа, теории уравнений с частными производными, комплексного анализа и других. В итоге возникла содержательная и глубокая теория, имеющая разнообразные приложения к естественным наукам и к технике.

Книга, предлагаемая вниманию читателя, принадлежит перу видных ученых, внесших значительный вклад в развитие теории. Она задумана авторами как учебник и рассчитана на широкую аудиторию. Это — одно из первых изложений теории вариационных неравенств на русском языке, содержащее основы теории и доходящее до самых современных проблем. К сожалению, авторы книги не всегда воздают должное советским математикам, внесшим большой вклад в развитие вариационных неравенств. Думаю, что книга может оказаться полезной для математиков, механиков, физиков и инженеров, интересующихся теоретическими проблемами и приложениями теории уравнений с частными производными.

Перевод первых пяти глав осуществлен Г. Г. Магарил-Ильяевым, остальные три главы перевел А. В. Фурсиков.

В. М. Тихомиров

Questo volume è dedicato alla memoria del nostro diletto amico e collega Nestor Riviere[1]

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительное развитие теории вариационных неравенств и плодотворность ее приложений убедили нас в том, что необходимо написать введение в эту область математики. Настоящая книга — наша попытка осуществить такой замысел. Надеюсь, что она окажется полезной и поучительной. Общая структура книги была нам ясна уже в июле 1976 г., и мы были уверены, что полностью завершим работу над ней в августе или сентябре. Наши прогнозы, касающиеся сроков, оказались слишком оптимистическими, но тем не менее труд закончен и отвечает первоначальному замыслу.

Многие главы книги возникли в результате обработки курсов лекций, прочитанных авторами в Высшей нормальной школе в Пизе, университетах Парижа и Миннесоты, в Колеж де Франс, Институте Миттаг-Леффлера и Северозападном университете. Несколько предложений о возможном использовании книги в лекционных курсах содержатся во введении.

Жизни и деятельности покойного Гвидо Стампаккья посвящена работа Ж. Л. Лионса и Э. Мадженеса в *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **15** (1978), 715—756.

Я хочу выразить глубокую благодарность нашим многочисленным друзьям и коллегам, которые оказывали нам большую помощь в течение этих лет, и прежде всего г-же Саре Стампаккья, без внимания и поддержки которой мы не смогли бы приступить к осуществлению задуманного, а мне не довелось бы завершить эту работу.

Особенно я хочу поблагодарить Х. Брезиса за многочисленные полезные обсуждения и постоянный интерес к нашей работе. На разных этапах написания книги большую помощь нам оказывали С. Мацционе, М. Крендалл и Д. Шеффер. Всех их я искренне благодарю. Наконец, мне хотелось бы поблагодарить М. Б. Артци и Б. Томпсона за внимательное прочтение рукописи.

Рончи и Миннеаполис
1976—1979

---

[1] Книга посвящается памяти нашего дорогого друга и коллеги Нестора Ривьере.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}^N$ — евклидово N-мерное пространство (произведение N экземпляров действительной прямой $\mathbb{R}$)

$\mathbb{C}^N$ — комплексное N-мерное пространство (произведение N экземпляров комплексной плоскости $\mathbb{C}$)

$x=(x_1, \ldots, x_N)$, $y=(y_1, \ldots, y_N)$ и т. д. — координаты в $\mathbb{R}^N$

$xy=x_1y_1+\ldots+x_Ny_N=x\cdot y=(x, y)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$

$|x|=\left(\sum\limits_1^N x_i^2\right)^{1/2}$ — длина $x\in\mathbb{R}^N$

$B_r(x)$ — открытый шар радиуса r с центром $x\in\mathbb{R}^N$

Ω — открытое (обычно ограниченное и связное) подмножество в $\mathbb{R}^N$

$\partial\Omega$ — граница Ω

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ — замыкание Ω

$\operatorname{int} U=\overset{\circ}{U}$ — внутренность U

$\operatorname{supp} u$ — носитель функции u — наименьшее замкнутое множество, вне которого $u=0$

$\partial u/\partial x_j$ — частная производная функции u по x_j (используются также обозначения: u_{x_j}, $\partial_j u$ или u_j)

$u_x=\operatorname{grad} u=\left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}\right)$

$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha_i\geqslant 0$ целые, — мультииндекс порядка $|\alpha|=\sum\limits_1^N\alpha_i$

$D^\alpha u=\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}u$ (за исключением гл. VI, где $D^\alpha u=(-i)^{|\alpha|}\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}u$)

$dx=dx_1\ldots dx_N$ — лебегова мера в $\mathbb{R}^N$

$\Delta=\sum\limits_1^N\partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, или лапласиан

$\langle\cdot, \cdot\rangle$ — билинейная форма, приводящая в двойственность (действительное) банахово пространство V и его двойственное V'; $\langle\cdot, \cdot\rangle\colon V'\times V\to\mathbb{R}$

$D_j=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y_j}$, $D_t=\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dt}$ (только в гл. VI)

$a_i b_i = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i$ — соглашение о суммировании: по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах их изменения; обычно $1 \leqslant i,\ j \leqslant N$

$a_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\eta_j$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

$C(\Omega)$ $(C(\bar{\Omega}))$ — пространство функций, непрерывных в Ω $(\bar{\Omega})$

$C^m(\Omega)$ $(C^{m,\lambda}(\Omega))$ — пространство функций, m раз непрерывно дифференцируемых в Ω (m-я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ); см. гл. II, § 4

$C^m(\bar{\Omega})$ $(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))$ — совокупность функций из $C^m(\Omega)$, которые m раз непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\bar{\Omega}$ (и m-я производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ)

$L^s(\Omega)$ — пространство измеримых по Лебегу функций u на Ω, для которых

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^s\,dx\right)^{1/s} < \infty \qquad (1 \leqslant s < \infty)$$

$L^\infty(\Omega)$ — пространство измеримых по Лебегу функций u на Ω, которые ограничены в существенном:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M \mid |u| \leqslant M \text{ п. в. в } \Omega\}$$

$H^{m,s}(\Omega)$, $H_0^{m,s}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$ — пространства Соболева; см. гл. II, § 4

$H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — совокупность функций из $H^1(\Omega')$, где $\Omega' \subset \Omega$ — ограниченное подмножество и $\bar{\Omega}' \subset \Omega$

$\mathscr{D}'(\Omega)$ — пространство обобщенных функций на Ω

$L^2(0,\ T;\ H^s(0,\ R))$ — см. гл. VIII, § 1

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге, которая задумана как учебник, мы излагаем основы теории вариационных неравенств и задач со свободной границей, а также приводим несколько выразительных примеров приложения этих теорий. Нами сделана попытка приспособить книгу к широкой аудитории, и именно с этой целью первые несколько параграфов каждой главы написаны в расчете на любого заинтересованного читателя, включая экономистов, инженеров и других наших научных коллег.

В книге отражен современный взгляд на теорию вариационных неравенств и методы их решения. Проработка ее позволит читателю подойти к самым последним достижениям в этой области.

В принципе наше изложение обращено к читателю, знакомому с теорией уравнений с частными производными, но вместе с тем одна из целей книги — как раз пробудить интерес к изучению этой теории.

Описание необходимых предварительных сведений и некоторые советы по использованию книги в качестве учебника приведены в конце этого введения.

Обсудим прежде всего (на элементарном уровне) вопрос о том, как возникают вариационные неравенства и отвечающие им задачи со свободной границей. Это позволит очертить предмет наших исследований. Начнем с обсуждения нескольких примеров, не давая точных определений.

Пример 1. Пусть f — гладкая действительная функция, определенная на отрезке $I=[a, b]$, и мы хотим найти точку $x_0 \in I$, в которой $f(x_0)=\min\limits_{x \in I} f(x)$. Возможны три случая:

(i) если $a<x_0<b$, то $f'(x_0)=0$;
(ii) если $x_0=a$, то $f'(x_0) \geqslant 0$;
(iii) если $x_0=b$, то $f'(x_0) \leqslant 0$.

Все они могут быть объединены одним соотношением:

$$f'(x_0)(x-x_0) \geqslant 0 \quad \forall x \in I,$$

которое мы и будем называть *вариационным неравенством.*

Пример 2. Пусть f — гладкая функция, определенная на замкнутом выпуклом подмножестве K евклидова N-мерного пространства $\mathbb{R}^N$, и пусть $x_0 \in K$ — такая точка, что $f(x_0) = \min_{x \in K} f(x)$. Поскольку K выпукло, для любого $x \in K$ отрезок $\{(1-t)x_0 + tx \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ лежит в K. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Она достигает минимума при $t = 0$, и поэтому, как в примере 1,

$$\Phi'(0) = \operatorname{grad} f(x_0)(x - x_0) \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Таким образом, точка $x_0 \in K$ удовлетворяет вариационному неравенству

$$\operatorname{grad} f(x_0)(x - x_0) \geqslant 0 \quad \forall x \in K.$$

Если K ограничено, то существование по крайней мере одной такой точки x_0 очевидно.

Пример 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ и ψ — такая функция на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, что $\max_{\Omega} \psi \geqslant 0$ и $\psi \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Положим

$$K = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v \geqslant \psi \quad \text{в} \quad \Omega \text{ и } v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Это выпуклое множество. Допустим, что оно не пусто. Будем искать функцию $u \in K$, для которой

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx = \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 \, dx.$$

Если такая функция u существует, то рассуждаем так же, как в предыдущем примере, используя снова выпуклость K. Для каждого $v \in K$ отрезок $\{u + t(v - u) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ лежит в K, и, следовательно, функция

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad}(u + t(v - u))|^2 \, dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

достигает своего минимума в точке $t = 0$. Это означает, что $\Phi'(0) \geqslant 0$, и мы приходим к вариационному неравенству

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad}(v - u) \, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

В данной задаче появляется множество $I = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}$, которое называется множеством примыкания, или коинцидентным множеством[1]). Наличие коинцидентного множества отличает решение вариационного неравенства от решения граничной задачи.

---

[1]) В оригинале «set of coincidence». — *Прим. перев.*

Функцию u можно интерпретировать как ординату положения равновесия тонкой мембраны, находящейся поверх тела $\{(x, x_{N+1}) \mid x_{N+1} \leqslant \psi(x),\ x \in \Omega\}$ и закрепленной вдоль границы $\partial\Omega$, т. е. $u(x)=0,\ x \in \partial\Omega$.

Пример 4. Пусть, как и выше, Ω — ограниченное открытое множество, а φ^1, φ^2, λ_1, λ_2, f_1, f_2 — некоторые гладкие функции на $\bar{\Omega}$, причем $\varphi^1 \leqslant \varphi^2$. Рассмотрим выпуклое множество пар функций

$$K = \{v = (v^1, v^2) \mid v^1 \leqslant v^2 \text{ в } \Omega,\ v^i = \varphi^i \text{ на } \partial\Omega,\ v^i \in C^1(\bar{\Omega}),\ i = 1, 2\}.$$

Будем искать среди них такую функцию u, что

$$\sum_i \int_\Omega \{\operatorname{grad} u^i \operatorname{grad}(v^i - u^i) + \lambda_i u^i (v^i - u^i)\}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_i \int_\Omega f_i (v^i - u^i)\, dx \quad \forall v \in K.$$

Это функция, на которой достигает минимума функционал

$$F(v) = \frac{1}{2} \sum_i \int_\Omega \{|\operatorname{grad} v^i|^2 + \lambda_i (v^i)^2\}\, dx - \sum_i \int_\Omega f_i v^i\, dx.$$

Решение $u = (u^1, u^2)$ можно интерпретировать как положение равновесия двух мембран, находящихся под действием сил и не имеющих возможности проходить друг через друга. Коинцидентное множество в данном случае имеет вид

$$I = \{x \in \Omega \mid u^1(x) = u^2(x)\}.$$

Пример 5. Пусть Ω и K те же, что и в примере 3. Нас интересует функция $u \in K$, график которой обладает минимальной поверхностью среди всех функций из K, т. е.

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}\, dx = \min_{v \in K} \int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} v|^2}\, dx.$$

Соответствующее вариационное неравенство записывается так:

$$\int_\Omega \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad}(v - u)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}}\, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Первые два из рассмотренных примеров относятся к минимизации функции конечного числа переменных и могут быть решены средствами анализа. Остальные примеры аналогичны задачам вариационного исчисления, поскольку они связаны с минимизацией функционалов, определенных на подмножествах бесконечномерных пространств.

Задачи вариационного исчисления обычно формулируются в узких классах функций, в которых они, вообще говоря, не имеют решения. Сейчас хорошо известно, что эта трудность преодолевается

расширением класса допустимых функций до некоторого подмножества в подходящем пространстве Соболева или в более общем пространстве обобщенных функций. В нашем случае существование решений в примерах 3 и 4 легко доказать, исходя, по существу, из свойств оператора проектирования на замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве. Пример 5 на первый взгляд кажется более сложным, поскольку здесь мы имеем дело с нерефлексивным банаховым пространством. Однако в данном случае возможен другой подход к вопросу существования решения. Он состоит в установлении соответствующих априорных оценок.

Общая проблема существования решения изучается в первых трех главах книги. Глава I посвящена вариационным неравенствам в $\mathbb{R}^N$ и родственному вопросу о неподвижных точках отображений. В гл. II исследуются вариационные неравенства в гильбертовом пространстве, включая неравенства, рассмотренные в примерах 3 и 4. В приложениях к гл. II изложены основные свойства пространств Соболева, а также доказательство регулярности решения уравнения второго порядка с ограниченными измеримыми коэффициентами. Более общие теоремы существования рассматриваются в гл. III.

Поскольку мы понимаем решение в слабом смысле, перед нами встают проблемы регулярности, т. е. исследование гладкости такого решения. Стоит отметить при этом, что эти проблемы для вариационных неравенств отличаются от аналогичных проблем в теории граничных задач. В последней теории чем более гладкими предполагаются данные задачи, тем более гладким, вообще говоря, является ее решение. В вариационных неравенствах ситуация иная. Ограничения, определяющие выпуклое множество, могут препятствовать регулярности решения, допуская гладкость лишь до определенного предела, который нельзя превзойти, какой бы гладкостью ни обладали данные задачи.

Типичным примером такой ситуации является «задача с препятствием» (пример 3). В этом случае, несмотря на гладкость препятствия ψ, можно утверждать лишь, что первые производные решения непрерывны, а вторые производные ограничены (но не непрерывны). Это явление можно наблюдать даже в одномерной задаче. Исследованию подобных вопросов посвящена гл. IV.

Итак, наличие препятствия влечет за собой ограничение на гладкость решения и, как мы отмечали в примере 3, приводит к появлению коинцидентного множества I. Последнее не произвольно, так как определяется вариационным условием примера 3. На самом деле мы увидим, что решение исходной задачи есть также решение уравнения Лапласа с данными Коши на границе ∂I множества I. Это предполагает, что ∂I обладает некоторыми дополнительными свойствами. Множество ∂I называется «свободной границей». Этот круг вопросов (главным образом в двумерном случае) обсуждается в гл. V. Доказывается, например, что если Ω выпукло, а ψ — ана-

литическая строго вогнутая функция, то ∂I — аналитическая жорданова кривая.

Более общие задачи со свободной границей в пространствах произвольной размерности рассматриваются в гл. VI. Здесь вводится понятие преобразования годографа (или частичного преобразования годографа), которое позволяет выпрямить свободную границу, но приводит к необходимости работать с существенно нелинейными уравнениями. Такой подход пригоден не во всех случаях. Действительно, решая этим способом пример 4, мы пришли бы к исследованию эллиптической системы, неизвестные которой определены на разных сторонах свободной границы. Мы описываем данную ситуацию и, кроме того, развиваем теорию эллиптических уравнений и систем с коэрцитивными граничными условиями. Из многих вопросов, которые могут быть изучены в рамках указанных здесь подходов, назовем задачу об удержании плазмы и эллиптические уравнения с совпадающими данными Коши на гиперповерхности.

Последние две главы (VII и VIII) посвящены применению вариационных неравенств к некоторым задачам физики и техники. Здесь рассмотрены задачи о смазке подшипника, фильтрации жидкости через пористую перегородку и обтекания жидкостью заданного профиля. Задача фильтрации исследуется и в трехмерной ситуации, что, в частности, приводит к необходимости изучения свободной границы в высших размерностях. В гл. VIII обсуждается задача Стефана.

Мы часто ссылаемся на отдельные результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных и других разделов анализа. Часть этих результатов включена непосредственно в текст книги. Это § 4 и приложение гл. II, приложение гл. IV, § 3 гл. VI и др. Другую часть составляют результаты, легко доступные, как нам кажется, не только специалистам по теории дифференциальных уравнений (например, классический принцип максимума, лемма Хопфа о граничной точке, неравенства Кальдерона — Зигмунда). На такие факты мы ссылаемся как на известные либо формулируем их без доказательства. В удобном для наших целей виде они изложены в книгах Куранта и Гильберта [1] («Методы математической физики», т. II) и Берса и др. [1] («Уравнения с частными производными»). Более широкое освещение этих вопросов можно найти в монографиях Морри [1] и Лионса и Мадженеса [1]. В указанных источниках содержатся, в частности, необходимые результаты эллиптической теории регулярности. Мы сожалеем, что не смогли дать полное изложение этого материала.

От читателя не требуется никаких предварительных знаний по вариационным неравенствам, но упомянем несколько работ, появившихся в последние годы, к которым можно обращаться за дополнительной информацией и справками исторического характера: Байокки [2, 3, 4], Байокки и Капело [1], Брезис [1, 3], Киндерлерер [5], Лионс [1], Дюво и Лионс [1], Мадженес [1] и Стам-

паккья [3, 4, 5]. В библиографии читатель найдет дополнительные ссылки.

Наш опыт преподавания показал, что на основе гл. I, II, первой части гл. III и первой части гл. IV можно построить односеместровый курс теории вариационных неравенств. Полезно включить в него первое приложение к гл. II. Если курс служит еще и введением в теорию эллиптических уравнений с ограниченными измеримыми коэффициентами, то можно добавить приложения B, C и D к гл. II. Если интерес направлен на изучение задач со свободной границей, дополнительный материал можно взять из гл. V и VI или, если акцент делается на приложения, из гл. VII.

Глава 1

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА В $\mathbb{R}^N$

1. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Теоремы о неподвижных точках позволяют решать многие задачи нелинейного анализа. Пусть F: $A \to A$ — отображение множества A в себя. Элемент $x \in A$ называется неподвижной точкой F, если $F(x) = x$. Другими словами, неподвижные точки отображения F — это решения уравнения $F(x) = x$. Первая теорема о неподвижных точках, называемая принципом сжимающих отображений, является абстрактным вариантом метода Пикара последовательных приближений.

Пусть S — метрическое пространство с метрикой d.

Определение 1.1. Отображение F: $S \to S$ называется *сжимающим*, если для некоторого α, $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$d(F(x),\ F(y)) \leqslant \alpha d(x,\ y), \quad x,\ y \in S. \tag{1.1}$$

Если допускается и $\alpha = 1$, то отображение F называется *нерастягивающим*.

Сформулируем принцип сжимающих отображений.

Теорема 1.2. *Пусть S — полное метрическое пространство и F: $S \to S$ — сжимающее отображение. Тогда у F существует единственная неподвижная точка.*

Отметим, что для нерастягивающих отображений эта теорема, вообще говоря, неверна. Примером может служить сдвиг на прямой, он не имеет неподвижных точек.

Следующая фундаментальная теорема принадлежит Брауэру. В настоящее время существует много ее доказательств, основанных на идеях, связанных с самыми различными разделами математики. Формулировка теоремы очень проста. Обозначим через $\mathbb{R}^N$ действительное евклидово пространство размерности $N \geqslant 1$.

Теорема 1.3 (Брауэр). *Пусть F — непрерывное отображение замкнутого шара $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ в себя. Тогда у F существует по крайней мере одна неподвижная точка.*

Доказательства теорем 1.2 и 1.3 содержатся во многих книгах (см., например, Масси [1]). Отметим, что в теореме Брауэра шар Σ

может быть заменен любым компактным выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^N$. Установление этого факта — одна из целей следующего параграфа.

2. СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ НА ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО

В данном параграфе будут изучены свойства проекции на выпуклое множество в действительном гильбертовом пространстве H. Именно эта общая ситуация будет полезна нам в дальнейшем. Приводимые здесь доказательства не связаны с размерностью H, и поэтому всюду можно читать $\mathbb{R}^N$ вместо H.

Лемма 2.1. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Тогда для каждого $x \in H$ существует единственная точка $y \in K$, такая что*

$$\|x-y\| = \inf_{\eta \in K} \|x-\eta\|. \tag{2.1}$$

Замечание 2.2. *Точка y, удовлетворяющая* (2.1), *называется проекцией x на K. При этом мы пишем $y = \mathrm{Pr}_K\, x$.*

Отметим, что $\mathrm{Pr}_K\, x = x$ для всех $x \in K$.

Доказательство леммы. Пусть $\eta_k \in K$ — минимизирующая последовательность, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \|\eta_k - x\| = d = \inf_{\eta\in K} \|\eta - x\|. \tag{2.2}$$

По правилу параллелограмма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x,\ y \in H$$

(которое является элементарным следствием свойств скалярного произведения в H), получаем, что

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 = 2\|x-\eta_k\|^2 + 2\|x-\eta_h\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(\eta_k+\eta_h)\right\|^2. \tag{2.3}$$

Поскольку K выпукло, $\frac{1}{2}(\eta_k+\eta_h) \in K$ и поэтому $d^2 \leqslant \left\|x - \frac{1}{2}(\eta_k+\eta_h)\right\|^2$. Следовательно,

$$\|\eta_k - \eta_h\|^2 \leqslant 2\|x-\eta_k\|^2 + 2\|x-\eta_h\|^2 - 4d^2,$$

и из (2.2) вытекает, что $\lim\limits_{k,\,h\to\infty} \|\eta_k - \eta_h\| = 0$.

Так как H полно, существует элемент $y \in K$, такой что $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = y$. Кроме того, $\|x-y\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x-\eta_k\| = d$.

Для доказательства единственности проекции достаточно только заметить, что после подстановки в (2.3) вместо η_k и η_h любых двух элементов y, $y' \in K$, удовлетворяющих (2.1), получим

$$\|y-y'\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-y'\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(y+y')\right\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

откуда следует, что $y = y'$. ∎

Продолжим изучение свойств проекции.

Теорема 2.3. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Тогда $y=\mathrm{Pr}_K x$ в том и только в том случае, когда*

$$(y,\ \eta-y)\geqslant(x,\ \eta-y)\quad \forall\eta\in K. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $x\in H$ и $y=\mathrm{Pr}_K x$. Поскольку K выпукло,

$$(1-t)\,y+t\eta=y+t\,(\eta-y)\in K\quad \forall\eta\in K,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

и потому вследствие (2.1) функция

$$\Phi(t)=\|x-y-t\,(\eta-y)\|^2=\|x-y\|^2-2t\,(x-y,\ \eta-y)+t^2\|\eta-y\|^2$$

достигает минимума в точке $t=0$. Это означает, что $\Phi'(0)\geqslant 0$, т. е. $(x-y,\ \eta-y)\leqslant 0$ при всех $\eta\in K$, или $(y,\ \eta-y)\geqslant(x,\ \eta-y)$ при всех $\eta\in K$.

С другой стороны, если $y\in K$ и $(y,\ \eta-y)\geqslant(x,\ \eta-y)$ при $\eta\in K$, то

$$0\leqslant(y-x,\ (\eta-x)+(x-y))\leqslant-\|x-y\|^2+(y-x,\ \eta-x).$$

Следовательно, $\|y-x\|^2\leqslant(y-x,\ \eta-x)\leqslant\|y-x\|\,\|\eta-x\|$ и тем самым

$$\|y-x\|\leqslant\|\eta-x\|\quad \forall\eta\in K. \ \blacksquare$$

Следствие 2.4. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Тогда оператор Pr_K нерастягивающий, т. е.*

$$\|\mathrm{Pr}_K x-\mathrm{Pr}_K x'\|\leqslant\|x-x'\|\quad \forall x,\ x'\in H \tag{2.5}$$

(*и, следовательно, непрерывный*).

Доказательство. Пусть $x,\ x'\in H$ *и* $y=\mathrm{Pr}_K x,\ y'=\mathrm{Pr}_K x'$. Тогда

$$(y,\ \eta-y)\geqslant(x,\ \eta-y)\qquad \forall\eta\in K,$$

$$(y',\ \eta-y')\geqslant(x',\ \eta-y')\quad \forall\eta\in K.$$

Положим $\eta=y'$ в первом неравенстве и $\eta=y$ во втором. Складывая затем эти неравенства, получим

$$\|y-y'\|^2=(y-y',\ y-y')\leqslant(x-x',\ y-y')\leqslant\|x-x'\|\,\|y-y'\|,$$

или $\|y-y'\|\leqslant\|x-x'\|$. $\blacksquare$

Отметим, что заодно нами получено другое доказательство единственности проекции.

В заключение этого параграфа докажем теорему Брауэра для компактных выпуклых множеств.

Теорема 2.5 (Брауэр). *Пусть $K\subset\mathbb{R}^N$ — компактное выпуклое множество и F: $K\to K$ — непрерывное отображение. Тогда у F существует неподвижная точка.*

Доказательство. Пусть Σ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^N$, такой что $K \subset \Sigma$. Согласно следствию 2.4, оператор Pr_K непрерывен. Следовательно, отображение $F \circ \mathrm{Pr}_K$: $\Sigma \to K \subset \Sigma$ непрерывно и переводит Σ в себя. Тогда по теореме 1.3 у него есть неподвижная точка x, т. е. $F \circ \mathrm{Pr}_K x = x \in K$. Но $\mathrm{Pr}_K x = x$, и поэтому $F(x) = x$. ∎

3. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

При изучении вариационных неравенств часто приходится иметь дело с отображениями F линейного пространства X (или выпуклого подмножества $K \subset X$) в двойственное пространство X'. С этим мы столкнемся, например, в гл. II и III. Напомним, что двойственным пространством $(\mathbb{R}^N)'$ к $\mathbb{R}^N$ является пространство всех линейных форм a: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x \to \langle a, x \rangle$ на $\mathbb{R}^N$. Тем самым мы имеем билинейное отображение

$$(\mathbb{R}^N)' \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad a,\ x \to \langle a, x \rangle,$$

которое и приводит $(\mathbb{R}^N)'$ и $\mathbb{R}^N$ в двойственность. Ясно, что всегда можно отождествить $(\mathbb{R}^N)'$ с $\mathbb{R}^N$, сопоставляя, например, элементу $a \in (\mathbb{R}^N)'$ вектор $\pi a \in \mathbb{R}^N$, такой что $\langle a, x \rangle = (\pi a, x)$. Возможны различные способы отождествления $(\mathbb{R}^N)'$ с $\mathbb{R}^N$, а также различные билинейные формы, приводящие эти пространства в двойственность, но мы всегда будем считать, что

$$\langle a, x \rangle = (\pi a, x), \quad a \in (\mathbb{R}^N)', \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где π: $(\mathbb{R}^N)' \to \mathbb{R}^N$ — указанное отождествление и $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение на $\mathbb{R}^N$. Функцию F: $\mathbb{R}^N \to (\mathbb{R}^N)'$ называем непрерывной, если непрерывна каждая из функций $F_1(x), \ldots, F_N(x)$ в соотношении $\langle F(x), y \rangle = (\pi F(x), y) = \sum_j F_j(x) y_j$. Читатель может проверить, что это эквивалентно обычному определению непрерывности.

Теорема 3.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — компактное выпуклое множество и F: $K \to (\mathbb{R}^N)'$ — непрерывное отображение. Тогда существует $x \in K$, такое что*

$$\langle F(x), y - x \rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K. \tag{3.1}$$

Доказательство. Равносильное утверждение заключается в том, что

$$\exists x \in K: \quad (x, y - x) \geqslant (x - \pi F(x), y - x) \quad \forall y \in K.$$

Отображение $\mathrm{Pr}_K \circ (I - \pi F)$: $K \to K$, где $Ix = x$, непрерывно и, следовательно, по теореме 2.5 у него есть неподвижная точка $x \in K$, т. е. $x = \mathrm{Pr}_K (I - \pi F) x$. По теореме 2.3

$$(x, y - x) \geqslant (x - \pi F(x), y - x) \quad \forall y \in K. \ ∎$$

Следствие 3.2. *Пусть x — решение неравенства* (3.1), *принадлежащее внутренности $\mathring{K}$ множества K. Тогда $F(x) = 0$.*

Доказательство. Если $x \in \overset{\circ}{K}$, то точки $y-x$ описывают окрестность начала, когда y пробегает K, т. е. для любого $\xi \in \mathbb{R}^N$ найдутся $\varepsilon \geqslant 0$ и $y \in K$, такие что $\xi = \varepsilon(y-x)$. Следовательно,

$$\langle F(x),\ \xi\rangle = \varepsilon\langle F(x),\ y-x\rangle \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

и поэтому $F(x)=0$. ■

Определение 3.3. Пусть K — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ и $x \in \partial K$. Гиперплоскость

$$\langle a,\ y-x\rangle = 0, \quad a \in (\mathbb{R}^N)' \setminus \{0\},$$

называется *опорной* к K, если $\langle a,\ y-x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in K$.

Следствие 3.4. *Пусть x — решение* (3.1) *и $x \in \partial K$. Тогда если элемент $F(x) \neq 0$, то он определяет опорную гиперплоскость к K.*

Действительно, аффинная функция $f(y) = \langle F(x),\ y-x\rangle$ неотрицательна при всех $y \in K$.

4. ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4.1. *Пусть даны выпуклое замкнутое множество K в $\mathbb{R}^N$ и непрерывное отображение F: $K \to (\mathbb{R}^N)'$. Требуется найти*

$$x \in K: \quad \langle F(x),\ y-x\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K.$$

Если K ограничено, то существование решения задачи 4.1 доказано в предыдущем параграфе. Однако в общем случае данная задача не всегда имеет решение. Например, при $K=\mathbb{R}$ у неравенства

$$f(x)(y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

нет решения, если $f(x)=e^x$. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования решения задачи 4.1. Для данного выпуклого множества K положим $K_R = K \cap \Sigma_R$, где Σ_R — замкнутый шар в $\mathbb{R}^N$ радиуса R с центром в нуле. Возвращаясь к нашему отображению F: $K \to (\mathbb{R}^N)'$, заметим, что по предыдущей теореме при всяком $K_R \neq \emptyset$ найдется по крайней мере один элемент

$$x_R \in K_R: \quad \langle F(x_R),\ y-x_R\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K_R. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ замкнуто и выпукло и F: $K \to (\mathbb{R}^N)'$ — непрерывное отображение. Тогда для существования решения задачи* 4.1 *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $R>0$ решение* (4.1) *$x_R \in K_R$ удовлетворяло условию*

$$|x_R| < R. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ясно, что если x — решение задачи 4.1, то x является и решением (4.1), как только $|x| < R$.

Предположим теперь, что для $x_R \in K_R$ справедливо (4.2). Тогда x_R — решение задачи 4.1. Действительно, так как $|x_R| < R$, то для каждого $y \in K$ найдется такое $\varepsilon \geqslant 0$, что $w = x_R + \varepsilon(y - x_R) \in K_R$. Следовательно,

$$x_R \in K_R \subset K: \quad 0 \leqslant \langle F(x_R),\ w - x_R \rangle = \varepsilon \langle F(x_R),\ y - x_R \rangle \quad \forall y \in K.$$

Это и значит, что x_R — решение задачи 4.1. ∎

Из доказанной теоремы можно вывести много достаточных условий существования решения. Мы сформулируем одно из них, которое окажется полезным в дальнейшем и приведет к понятию коэрцитивности.

Следствие 4.3. *Пусть отображение* $F\colon K \to (\mathbb{R}^N)'$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0),\ x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} \to \infty \ \text{при}\ |x| \to \infty,\ x \in K, \tag{4.3}$$

для некоторого $x_0 \in K$. *Тогда существует решение задачи* 4.1.

Доказательство. Пусть $H > |F(x_0)|$ и $R > |x_0|$ таковы, что

$$\langle F(x) - F(x_0),\ x - x_0 \rangle \geqslant H|x - x_0| \ \text{при}\ |x| \geqslant R,\ x \in K.$$

Тогда

$$\langle F(x),\ x - x_0 \rangle \geqslant H|x - x_0| + \langle F(x_0),\ x - x_0 \rangle \geqslant H|x - x_0| - \\ - |F(x_0)|\,|x - x_0| \geqslant (H - |F(x_0)|)(|x| - |x_0|) > 0 \ \text{при}\ |x| \geqslant R. \tag{4.4}$$

Если теперь $x_R \in K_R$ — решение (4.1), то

$$\langle F(x_R),\ x_R - x_0 \rangle = -\langle F(x_R),\ x_0 - x_R \rangle \leqslant 0$$

и, следовательно, в силу (4.4), $|x_R| < R$. ∎

Вообще говоря, вариационное неравенство может иметь много решений. Однако существует естественное условие, гарантирующее единственность. Предположим, что $x,\ x' \in K$ — два различных решения задачи 4.1. Тогда

$$\langle F(x),\ y - x \rangle \geqslant 0 \qquad \forall y \in K,$$

$$\langle F(x'),\ y - x' \rangle \geqslant 0 \qquad \forall y \in K.$$

Подставляя в первое неравенство $y = x'$, во второе $y = x$ и затем складывая их, получим $\langle F(x) - F(x'),\ x - x' \rangle \leqslant 0$. Таким образом, естественное условие единственности решения заключается в том, что

$$\langle F(x) - F(x'),\ x - x' \rangle > 0 \quad \forall x,\ x' \in K,\ x \neq x'. \tag{4.5}$$

Отметим, что это условие и условия следствия 4.3 будут полезны при изучении бесконечномерной задачи. Приведем два определения.

Определение 4.4. Условие (4.3) следствия 4.3 будем называть условием *коэрцитивности*.

Определение 4.5. По аналогии с (4.5) назовем отображение F: $K \to (\mathbb{R}^N)'$ *монотонным*, если

$$\langle F(x) - F(x'),\ x - x'\rangle \geqslant 0 \quad \forall x,\ x' \in K,$$

и *строго монотонным*, если равенство возможно только при $x = x'$, т. е. когда справедливо (4.5).

В качестве приложения понятия строго монотонного отображения сформулируем следующее

Предложение 4.6. *Пусть* $K_1 \subset \mathbb{R}^N$ *— замкнутое выпуклое множество и* F: $K_1 \to (\mathbb{R}^N)'$ *— непрерывное строго монотонное отображение. Пусть, далее,* $K_2 \subset K_1$ *замкнуто и выпукло. Предположим, что существуют* $x_j \in K_j$, $j = 1, 2$, *такие что*

$$\langle F(x_j),\ y - x_j\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in K_j, \quad j = 1,\ 2.$$

Тогда (i) *если* $F(x_2) = 0$, *то* $x_1 = x_2$;

(ii) *если* $F(x_2) \neq 0$ *и* $x_1 \neq x_2$, *то гиперплоскость* $\langle F(x_2),\ y - x_2\rangle = 0$ *отделяет* x_1 *от* K_2[1]).

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

5. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВАРИАЦИОННЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

В этом параграфе мы коснемся лишь некоторых элементарных задач, связанных с вариационными неравенствами. В частности, обсудим взаимосвязи между выпуклыми функциями и монотонными операторами. Здесь мы стандартно отождествляем $\mathbb{R}^N$ и $(\mathbb{R}^N)'$. Пусть $f \in C^1(K)$, $K \subset \mathbb{R}^N$ — замкнутое выпуклое множество и $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$.

Предложение 5.1. *Пусть существует* $x \in K$, *такое что* $f(x) = \min\limits_{y \in K} f(y)$. *Тогда* x *— решение вариационного неравенства*

$$(F(x),\ y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in K$$

(*см. пример* 2 *во введении*).

Доказательство. Если $y \in K$, то $z = x + t(y - x) \in K$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, и поэтому функция $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, достигает минимума в точке $t = 0$. Следовательно,

$$0 \leqslant \varphi'(0) = (\operatorname{grad} f(x),\ y - x) = (F(x),\ y - x). \ \blacksquare$$

Для выпуклых функций f справедливо обратное утверждение.

---

[1]) То есть $\langle F(x_2),\ y - x_2\rangle \geqslant 0 > \langle F(x_2),\ x_1 - x_2\rangle$ при всех $y \in K_2$. — *Прим. перев.*

Предложение 5.2. *Пусть f выпукла и*

$$x \in K: \quad (F(x),\ y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in K.$$

Тогда $f(x) = \min\limits_{y \in K} f(y)$.

Доказательство. Действительно, поскольку f выпукла, то

$$f(y) \geqslant f(x) + (F(x),\ y-x) \quad \forall y \in K.$$

Но $(F(x),\ y-x) \geqslant 0$, так что $f(y) \geqslant f(x)$. ∎

Предложение 5.3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^N$ и f: $E \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая выпуклая (строго выпуклая) функция. Тогда отображение $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ монотонно (строго монотонно).*

Доказательство. Для любых $x,\ x' \in E$ имеем $f(x) \geqslant f(x') + (F(x'),\ x-x')$ и $f(x') \geqslant f(x) + (F(x),\ x'-x)$.

Складывая эти неравенства, получаем

$$(F(x') - F(x),\ x'-x) \geqslant 0 \quad \forall x,\ x' \in E.$$

Следовательно, F монотонно. Доказательство того, что F строго монотонно, если f строго выпукла, аналогично. ∎

Однако не любой монотонный оператор является градиентом некоторой выпуклой функции. Вот, например, векторное поле, не являющееся градиентом никакой функции:

$$F(x) = (x_1,\ x_2 + \varphi(x_1)), \quad x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $\varphi \neq 0$ — гладкая функция одного переменного $x_1 \in \mathbb{R}$, такая что $|\varphi(x_1) - \varphi(x_1')| \leqslant |x_1 - x_1'|$ при всех $x_1,\ x_1' \in \mathbb{R}$. Вычисления показывают, что F — монотонный оператор:

$$\begin{aligned}
(F(x) - F(x'),\ x-x') &= \\
&= ((x_1 - x_1',\ x_2 - x_2' + \varphi(x_1) - \varphi(x_1')),\ (x_1 - x_1',\ x_2 - x_2')) = \\
&= |x-x'|^2 + (x_2 - x_2')(\varphi(x_1) - \varphi(x_1')) \geqslant \\
&\geqslant |x-x'|^2 - |x_2 - x_2'|\,|\varphi(x_1) - \varphi(x_1')| \geqslant \\
&\geqslant |x-x'|^2 - \tfrac{1}{2}|x_2 - x_2'|^2 - \tfrac{1}{2}|\varphi(x_1) - \varphi(x_1')|^2 \geqslant \tfrac{1}{2}|x-x'|^2.
\end{aligned}$$

Условия того, что данный монотонный оператор является градиентом некоторой выпуклой функции, подробно изучены Рокафелларом [1].

В заключение этой главы упомянем задачу математического программирования, которая может быть сведена к вариационному неравенству.

Дополнительная задача 5.4. *Пусть*

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x_1,\ \ldots,\ x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geqslant 0\}$$

(*это замкнутое выпуклое подмножество* $\mathbb{R}^N$) *и* $F: \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$. *Требуется найти* $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$, *такое что* $F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N$ *и* $(F(x_0), x_0) = 0$.

Теорема 5.5. *Точка* $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ *есть решение задачи* 5.4 *в том и только в том случае, когда*

$$(F(x_0), y - x_0) \geqslant 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^N.$$

Доказательство. Заметим сначала, что если x_0 — решение задачи 5.4, то $(F(x_0), y) \geqslant 0$ для любого $y \in \mathbb{R}_+^N$ и тем самым

$$(F(x_0), y - x_0) = (F(x_0), y) - (F(x_0), x_0) = (F(x_0), y) \geqslant 0.$$

Допустим теперь, что $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$ — решение вариационного неравенства Тогда $y = x_0 + e_i$, где $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте), есть элемент $\mathbb{R}_+^N$ и, следовательно,

$$0 \leqslant (F(x_0), x_0 + e_i - x_0) = (F(x_0), e_i) = F_i(x_0),$$

т. е. $F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N$. Поскольку $y = 0 \in \mathbb{R}_+^N$, то $(F(x_0), x_0) \leqslant 0$. Далее, x_0, $F(x_0) \in \mathbb{R}_+^N$, и потому $(F(x_0), x_0) \geqslant 0$, так что $(F(x_0), x_0) = 0$. ∎

Комментарии и библиографические указания

Характеризация проекции на выпуклое множество с помощью вариационного неравенства (см. § 3) использовалась также Лионсом и Стампаккья [1]. Теорема 3.1 доказана Хартманом и Стампаккья [1]. Другое доказательство, в предположении что F монотонно, дано Браудером [1]. В приведенном нами доказательстве использованы некоторые упрощения, предложенные Брезисом. Теорему 4.2 можно найти у Хартмана и Стампаккья [1] или у Стампаккья [4]. Условия следствия 4.3 часто использовались, начиная с работ Браудера [1, 2] и Минти [1, 2].

Взаимосвязи между выпуклыми функциями и вариационными неравенствами рассмотрены Рокафелларом [1] и Моро [1]. Последним автором было развито понятие субдифференциала (субградиента).

Тот факт, что задача 5.4 может быть сведена к вариационному неравенству, был отмечен Карамардяном. Относительно связей между математическим программированием и вариационными неравенствами в $\mathbb{R}_+^N$ см. Манчино и Стампаккья [1].

Упражнения

1. Докажите предложение 4.6.

2. Отображение F из $\mathbb{R}^N$ в $(\mathbb{R}^N)'$ называется *циклически монотонным*, если для любого множества точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (n произвольно)

$$\langle F(x_0), x_1 - x_0\rangle + \langle F(x_1), x_2 - x_1\rangle + \ldots + \langle F(x_n), x_0 - x_n\rangle \leqslant 0.$$

Покажите, что $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ циклически монотонно, если f — выпуклая функция класса C^1.

3. (i) Выведите теорему Брауэра о неподвижной точке из теоремы 3.1

(ii) Пусть F — непрерывное отображение замкнутого шара $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ в себя. Предположим, что для любого $x \in \partial\Sigma$ векторы x и $F(x)$ имеют разные направления. Тогда существует точка $x_0 \in \Sigma$, в которой $F(x_0) = 0$.

[*Доказательство.* (i) Применяя теорему 3.1 к отображению $I-F$, находим, что

$$\exists x_0 \in K: \quad (x_0 - F(x_0),\ y - x_0) \geqslant 0 \quad \forall y \in K.$$

В силу условий теоремы 2.5, можно положить $y = F(x_0)$ и, следовательно, $F(x_0) = x_0$.

(ii) По теореме 3.1 существует точка $x_0 \in \Sigma$, такая что $(F(x_0),\ y - x_0) \geqslant 0$ при всех $y \in \Sigma$. Но $x_0 \notin \partial\Sigma$, так как иначе вектор $F(x_0)$ имел бы то же направление, что и x_0. Таким образом, в силу следствия 3.2, $F(x_0) = 0$.]

4. Сформулируйте и решите дополнительную задачу, когда F — непрерывное отображение из $\mathbb{R}^N$ в $(\mathbb{R}^N)'$.

5. Докажите лемму Кнастера — Куратовского — Мазуркевича:

Пусть X — произвольное множество в $\mathbb{R}^N$. Каждому $x \in X$ сопоставим замкнутое множество $F(x)$ в $\mathbb{R}^N$, так что

(i) *по крайней мере для одной точки $x_0 \in X$ множество $F(x_0)$ компактно,*

(ii) *выпуклая оболочка каждого конечного подмножества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ множества X содержится в объединении $\bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$.*

Тогда $\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \varnothing$.

[*Доказательство.* Поскольку множества $F(x) \cap F(x_0)$ как замкнутые подмножества компакта компактны, для того чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что семейство $\{F(x)\}_{x \in X}$ центрировано. Допустим противное, что существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_k$, таких что $\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) = \varnothing$. Пусть U_i — дополнение к $F(x_i)$; тогда $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \mathbb{R}^N$.

Обозначим далее через $\{\psi_i(x)\}$ разбиение единицы в $\mathbb{R}^N$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, т. е. $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$, $\psi_i \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_i$ и $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Рассмотрим отображение Φ, сопоставляющее x вектор $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(x) x_i$. Так как $\Phi(x)$ содержится в выпуклой оболочке множества $\{x_1, \ldots, x_k\} = K$, то Φ переводит K в себя. Следовательно, по теореме Брауэра (теорема 2.5) у Φ существует по крайней мере одна неподвижная точка $\bar{x} \in K$, т. е. $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(\bar{x}) x_i$. Меняя, если нужно, индексацию множеств U_i, можно считать, что для некоторого s, $s \leqslant k$

$$\psi_i(\bar{x}) \begin{cases} \neq 0, & \text{если } i \leqslant s, \\ = 0, & \text{если } i > s. \end{cases}$$

Таким образом, $\bar{x}$ принадлежит выпуклой оболочке множества $\{x_1, \ldots, x_s\}$ и, следовательно, $\bar{x} \in \bigcup_{i \leqslant s} F(x_i)$, т. е. $\bar{x} \in F(x_i)$ для некоторого $i \leqslant s$. Это значит, что $\bar{x} \notin U_i$ и поэтому $\psi_i(\bar{x}) = 0$ при некотором $i \leqslant s$, что приводит к противоречию.]

6. Пусть K — непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^N$, состоящее более чем из одной точки. Покажите, что существует целое число k, $0 < k \leqslant N$, такое что K целиком расположено в k-мерном линейном многообразии в $\mathbb{R}^N$ и имеет в этом многообразии внутренние точки.

7. Рассмотрим собственную выпуклую функцию из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, т. е. такую выпуклую функцию f, которая не равна тождественно $+\infty$. Элемент $x^* \in (\mathbb{R}^N)'$ называют субградиентом f в точке x, если

$$f(y) \geqslant f(x) + \langle x^*, y-x\rangle \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Геометрически это условие означает, что график аффинной функции $y \to f(x) + \langle x^*, y-x\rangle$ является опорной гиперплоскостью к выпуклому множеству $\{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \lambda \geqslant f(x)\}$ в точке $(x, f(x))$. Совокупность всех субградиентов x^* функции f в точке x обозначается $\partial f(x)$[1]. Многозначное отображение ∂f: $x \to \partial f(x) \subset \mathbb{R}^N$ называется субдифференциалом f.

Многозначное отображение A из $\mathbb{R}^N$ в $(\mathbb{R}^N)'$ называется монотонным, если

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geqslant 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N, \qquad \forall y_i \in Ax_i, \quad i=1, 2,$$

где Ax обозначает образ (быть может, пустой) точки x.

Собственная выпуклая функция f на $\mathbb{R}^N$ достигает минимума в точке x тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(x)$.

8. Определим многозначное отображение χ замкнутого выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^N$ в $(\mathbb{R}^N)'$, полагая $\chi(x) = 0$, если $x \in \mathring{K}$, и $\chi(x) = \{a \in (\mathbb{R}^N)' \mid \langle a, y-x\rangle = 0$ — опорная гиперплоскость к $K\}$, если $x \in \partial K$. Тогда решение вариационного неравенства (3.1) равносильно нахождению $x \in K$, такого что $F(x) \in \chi(x)$.

9. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — гладкие выпуклые функции на $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{grad} f_i(x) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, и

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f_i(x) \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \qquad \mathring{K} \neq \varnothing. \tag{P.1}$$

Покажите, что если $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j > 0$, $f_j(x_0) \leqslant 0$ и $\lambda_j f_j(x_0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то $\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} f_j(x_0), y - x_0\right) = 0$ — опорная гиперплоскость к множеству K в точке x_0.

Пусть теперь F: $K \to \mathbb{R}^N$ — непрерывное отображение и

$$x_0 \in K: \quad (F(x_0), y - x_0) \geqslant 0 \qquad \forall y \in K.$$

Если $F(x_0) \neq 0$, то $(F(x_0), y - x_0) = 0$ — опорная гиперплоскость к K в x_0. Следовательно,

$$F(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} f_j(x_0) = 0$$

для некоторого набора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Если $F(x_0) = 0$, то можно положить $\lambda_j = 0$. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называются множителями Лагранжа, а сам результат — *условием Куна — Таккера*. Итак, *если* $K \subset \mathbb{R}^N$ *определено формулой* (P.1), F: $K \to \mathbb{R}^N$ — *непрерывное отображение и*

$$x_0 \in K: (F(x_0), y - x_0) \geqslant 0 \qquad \forall y \in K,$$

то $F(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} f_j(x_0) = 0$, *где* $\lambda_j \geqslant 0$, $f_j(x_0) \leqslant 0$ *и* $\lambda_j f_j(x_0) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

---

[1] И называется субдифференциалом f в точке x. — *Прим. перев.*

Глава II

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Многие интересные вопросы теории вариационных неравенств можно выразить на языке билинейных форм в гильбертовых пространствах. Этот подход является обобщением вариационной теории граничных задач для линейных эллиптических уравнений.

Пусть H — действительное гильбертово пространство и H' — двойственное ему относительно билинейной формы

$$\langle \cdot,\ \cdot \rangle\colon H' \times H \to \mathbb{R}, \quad f,\ x \to \langle f,\ x \rangle.$$

Скалярное произведение и норму в H обозначаем соответственно через $(\cdot,\ \cdot)$ и $\|\cdot\|$.

Отображение a: $H \times H \to \mathbb{R}$ называется действительной билинейной формой на H, если a непрерывно и линейно по каждому аргументу. Билинейная форма a симметрична, если

$$a(u,\ v) = a(v,\ u) \quad \forall u,\ v \in H.$$

Каждый линейный непрерывный оператор A: $H \to H'$ определяет билинейную форму

$$a(u,\ v) = \langle Au,\ v \rangle. \tag{1.1}$$

Действительно, билинейность очевидна, а непрерывность следует из того, что $|a(u,\ v)| \leqslant c\|u\|\|v\|$ для некоторого $c > 0$. Обратно, если дана билинейная форма $a(u,\ v)$, то для каждого u отображение $v \to a(u,\ v)$, $v \in H$, определяет линейный непрерывный функционал на H и, следовательно, существует линейный оператор A: $H \to H'$, такой что справедлива формула (1.1).

Определение 1.1. Билинейная форма $a(u,\ v)$ называется *коэрцитивной на* H, если существует такое $\alpha > 0$, что

$$a(v,\ v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H. \tag{1.2}$$

Для коэрцитивности $a(u,\ v)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ей по формуле (1.1) отображение A было коэрцитивно в смысле гл. I (определение 4.4). Очевидно, что коэрцитивная сим-

метричная билинейная форма $a(u, v)$ определяет норму $(a(v, v))^{1/2}$ на H, эквивалентную $\|v\|$.

Нас будет интересовать следующая

Задача 1.2. *Пусть* $K \subset H$ — *замкнутое выпуклое множество и* $f \in H'$. *Требуется найти*

$$u \in K: \quad a(u, v-u) \geqslant \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K. \tag{1.3}$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 2.1. *Пусть* $a(u, v)$ — *коэрцитивная билинейная форма на* H, $K \subset H$ — *замкнутое выпуклое множество и* $f \in H'$. *Тогда существует единственное решение задачи* 1.2. *Кроме того, отображение* $f \to u$ *липшицево, т. е. если* u_1 *и* u_2 — *решения задачи* 1.2, *соответствующие* f_1 *и* $f_2 \in H'$, *то*

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant (1/\alpha) \|f_1 - f_2\|_{H'}. \tag{2.1}$$

Заметим, что если K — подпространство в H, то отображение $f \to u$ линейно.

Доказательство. Покажем сначала, что справедлива формула (2.1). Пусть u_1 и $u_2 \in K$ — решения задачи 1.2, соответствующие f_1 и $f_2 \in H'$, т. е.

$$a(u_i, v-u_i) \geqslant \langle f_i, v-u_i \rangle \quad \forall v \in K, \ i = 1, 2.$$

Подставим $v = u_2$ в неравенство для u_1 и $v = u_1$ в неравенство для u_2. Тогда после сложения получим

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leqslant \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Вследствие коэрцитивности a

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leqslant \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leqslant \|f_1 - f_2\|_{H'} \|u_1 - u_2\|,$$

и тем самым (2.1) доказано[1].

Доказательство существования решения разобьем на несколько этапов. Предположим сначала, что форма $a(u, v)$ симметрична. Введем в рассмотрение функционал

$$I(u) = a(u, u) - 2\langle f, u \rangle, \quad u \in H.$$

Пусть $d = \inf\limits_K I(u)$. Так как

$$I(u) \geqslant \alpha \|u\|^2 - 2\|f\|_{H'} \|u\| \geqslant \alpha \|u\|^2 - (1/\alpha) \|f\|^2_{H'} - \alpha \|u\|^2 = -(1/\alpha) \|f\|^2_{H'},$$

то $d \geqslant -(1/\alpha)\|f\|^2_{H'} > -\infty$. Выберем минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ для I в K так, чтобы $d \leqslant I(u_n) \leqslant d + 1/n$. Применяя

---

[1] В частности, доказана единственность решения. — *Прим. перев.*

правило параллелограмма и учитывая, что K выпукло, получим

$$\alpha \| u_n - u_m \|^2 \leqslant a(u_n - u_m,\ u_n - u_m) =$$
$$= 2a(u_n,\ u_n) + 2a(u_m,\ u_m) - 4a\left(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m),\ \tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\right) =$$
$$= 2I(u_n) + 2I(u_m) - 4I\left(\tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\right) \leqslant 2[(1/n) + (1/m)].$$

Во втором равенстве мы воспользовались очевидным соотношением

$$4\langle f,\ u_n\rangle + 4\langle f,\ u_m\rangle - 8\langle f,\ \tfrac{1}{2}(u_n + u_m)\rangle = 0.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ — последовательность Коши, и, поскольку K замкнуто, она сходится к некоторому элементу $u \in K$. Но тогда $I(u_n) \to I(u)$ и, следовательно, $I(u) = d$.

Пусть теперь $v \in K$. Если $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, то $u + \varepsilon(v - u) \in K$ и $I(u + \varepsilon(v - u)) \geqslant I(u)$. Это значит, что $(d/d\varepsilon) I(u + \varepsilon(v - u))|_{\varepsilon=0} \geqslant 0$, или $a(u,\ v - u) \geqslant \langle f,\ v - u\rangle$. Так как $v \in K$ произвольно, то этим доказано существование решения в задаче 1.2 для случая симметричной формы $a(u,\ v)$.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Для этого введем семейство билинейных форм

$$a_t = a_0(u,\ v) + tb(u,\ v), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $a_0(u,\ v) = \frac{1}{2}(a(u,\ v) + a(v,\ u))$ и $b(u,\ v) = \frac{1}{2}(a(u,\ v) - a(v,\ u))$ — соответственно симметричная и антисимметричная части a. Очевидно, что $a_1(u,\ v) = a(u,\ v)$ и $a_t(u,\ v)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, коэрцитивна с той же самой константой α, что и $a(u,\ v)$.

Лемма 2.2. *Если задача* 1.2 *разрешима для* $a_\tau(u,\ v)$ *и всех* $f \in H'$, *то она разрешима и для* $a_t(u,\ v)$ *при всех* $f \in H'$, *где* $\tau \leqslant t \leqslant \tau + t_0$, $t_0 < \alpha/M$ *и* $M = \sup(|b(u,\ v)|/\|u\|\|v\|) < +\infty$.

Доказательство. Пусть $f \in H'$. Определим отображение $T\colon H \to K$, полагая $u = Tw$, где $u \in K$ — такой элемент, что $a_\tau(u,\ v - u) \geqslant \langle F_t,\ v - u\rangle$ при всех $v \in K$ и

$$\langle F_t,\ v\rangle = \langle f,\ v\rangle - (t - \tau)\, b(w,\ v), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau + t_0.$$

Существование указанного $u \in K$ следует из предположений леммы, а его единственность доказана выше.

Пусть $u_1 = Tw_1$ и $u_2 = Tw_2$. Тогда по неравенству (2.1)

$$\| u_1 - u_2 \| \leqslant (1/\alpha)(t - \tau) M \| w_1 - w_2 \| \leqslant (1/\alpha) t_0 M \| w_1 - w_2 \|.$$

Поскольку $t_0 M/\alpha < 1$, то T — сжимающее отображение и, следовательно, по теореме 1.2 гл. I, у него есть единственная неподвижная точка u. Подставляя теперь u вместо w, получим, что при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + t_0$

$$a_t(u,\ v - u) \geqslant \langle f,\ v - u\rangle \quad \forall v \in K.$$

Тем самым лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы остается только заметить, что так как задача 1.2 разрешима для симметричной формы $a_0(u, v)$, то после применения конечное число раз леммы 2.2 она окажется разрешимой и для формы $a(u, v)$. ∎

Отметим, что доказательство теоремы 2.1, как и теоремы 3.1 гл. I, сводится в конечном счете к рассмотрению некоторой задачи минимизации и применению теоремы о неподвижной точке. В случае когда $K = H$, теорема 2.1 переходит в лемму Лакса — Мильграма[1]), которая утверждает, что если $a(u, v)$ — билинейная коэрцитивная форма, то любой линейный функционал $v \to \langle f, v\rangle$ на H может быть представлен этой формой при некотором $u \in H$.

3. СРЕЗКА

Пусть $E \subset \mathbb{R}^N$ измеримо по Лебегу, $\varphi \in L^2(E)$ и

$$K = \{v \in L^2(E) \mid v \geqslant \varphi \text{ п.в. в } E\} \subset L^2(E).$$

Ясно, что K — выпуклое замкнутое множество. Определим скалярное произведение (u, v) на $L^2(E)$, полагая

$$(u, v) = \int_E u(x)\, v(x)\, dx.$$

Очевидно, что это коэрцитивная билинейная форма на $L^2(E)$. По теореме 2.1 для каждой функции $f \in L^2(E)$ существует единственная функция

$$u \in K: \quad \int_E u(v-u)\, dx \geqslant \int_E f(v-u)\, dx \quad \forall v \in K. \tag{3.1}$$

Мы утверждаем, что u имеет вид

$$u = \max(\varphi, f) = \begin{cases} \varphi(x), & f(x) \leqslant \varphi(x)\,^{2)}, \\ f(x), & f(x) \geqslant \varphi(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Действительно, согласно (3.2),

$$\int_E u(v-u)\, dx = \int_{\{f<\varphi\}} \varphi(v-\varphi)\, dx + \int_{\{\varphi\leqslant f\}} f(v-f)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\{f\leqslant\varphi\}} f(v-\varphi)\, dx + \int_{\{\varphi\leqslant f\}} f(v-f)\, dx,$$

так как $v - \varphi \geqslant 0$ для любого $v \in K$. Следовательно,

$$\int_E u(v-u)\, dx \geqslant \int_E f(v-u)\, dx \quad \forall v \in K$$

и, таким образом, u — решение вариационного неравенства.

---

[1]) См. Иосида К. Функциональный анализ. Пер. с англ. — М.: Мир, 1967, с. 137. — *Прим. перев.*

[2]) Это и есть срезка (truncation). — *Прим. перев.*

У читателя могут возникнуть вопросы, касающиеся гладкости решения задачи 1.2. В этой связи мы отметим здесь лишь один результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ — *открытое множество,* $2N/(N-2) \leqslant p \leqslant \infty$, φ, $f \in H^{1,\,p}(\Omega)$ *и* $K = \{v \in L^2(\Omega) \mid v \geqslant \varphi$ п. в. в $\Omega\}$. *Тогда решение* u *вариационного неравенства* (3.1) *принадлежит* $H^{1,\,p}(\Omega)$.

Доказательство этого утверждения содержится в приложении А. Определение пространств $H^{1,\,p}(\Omega)$ и их свойства приведены в следующем параграфе.

4. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В нашем подходе важную роль играют пространства Соболева, изучению которых посвящена обширная литература. Особенно часто мы будем ссылаться на книгу Морри [1], где эти пространства исследованы весьма глубоко. Свойства пространств Соболева, необходимые для наших целей, собраны в приложении А к этой главе. В этом параграфе мы лишь напоминаем некоторые определения, а затем в качестве приложения приводим формулировки ряда классических граничных задач и показываем, как можно использовать теорему 2.1 для получения их слабых решений.

Начнем с определений некоторых функциональных пространств.

Определение 4.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое множество с замыканием $\bar{\Omega}$ и границей $\partial\Omega$. Обозначим через $C^k(\bar{\Omega})$ пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых действительных функций на $\bar{\Omega}$, а через $C^{k,\,\lambda}(\bar{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$, — подпространство тех функций из $C^k(\bar{\Omega})$, чьи производные порядка k непрерывны по Гёльдеру с показателем λ. Напомним, что $u \in C^{0,\,\lambda}(\bar{\Omega})$, или u *непрерывна по Гёльдеру* (*удовлетворяет условию Гёльдера*) с показателем λ в $\bar{\Omega}$, если

$$[u]_\lambda = \sup_{x,\,x' \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\lambda} < +\infty.$$

Функцию u, для которой это соотношение выполняется при $\lambda = 1$, будем называть *липшицевой*.

Наборы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ неотрицательных целых чисел называют мультииндексами порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N \geqslant 0$. Для каждого α определен дифференциальный оператор $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_N)^{\alpha_N}$ порядка $|\alpha|$. Здесь $(\partial^0/\partial x_i^0)\, u = u$, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Определение 4.2. В линейном пространстве $C^m(\bar{\Omega})$ введем норму

$$\|u\|_{H^{m,\,s}(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^s(\Omega)}, \quad 1 \leqslant s < \infty, \tag{4.1}$$

и обозначим через $H^{m,s}(\Omega)$ пополнение $C^m(\bar{\Omega})$ по этой норме. Для сокращения записи обычно будем писать $H^m(\Omega)$ вместо $H^{m,2}(\Omega)$.

Если предположить, что граница $\partial\Omega$ липшицева, т. е. у каждой точки $\partial\Omega$ существует такая окрестность U, что $\partial\Omega \cap U$ есть график некоторой липшицевой функции, то можно показать (см. Морри [1], который называет такие области «строго липшицевыми»), что $u \in H^{m,s}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $u \in L^s(\Omega)$ и найдется такая функция $g_\alpha \in L^s(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant m$, что

$$\int_\Omega u(x)\, D^\alpha \zeta(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x)\, \zeta(x)\, dx \qquad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Здесь $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на Ω с компактным носителем.

Определение 4.3. $H_0^{m,s}(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (4.1).

Определение 4.4. $H^{m,\infty}(\Omega)$ — это класс функций из $C^{m-1}(\bar{\Omega})$, производные которых порядка $m-1$ удовлетворяют в $\bar{\Omega}$ условию Липшица.

При определении пространств $H^{1,s}(\Omega)$ можно было бы вместо $C^1(\bar{\Omega})$ рассматривать $C^{0,1}(\bar{\Omega}) = H^{1,\infty}(\Omega)$, т. е пространство липшицевых функций в $\bar{\Omega}$. В этом нетрудно убедиться, если граница $\partial\Omega$ липшицева. Действительно, пусть $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$; тогда u допускает продолжение до функции $\tilde{u}$ из $H_0^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ (пространства липшицевых функций на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем). Так как $\tilde{u}$ можно аппроксимировать в $H_0^{1,s}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant s < \infty$, гладкими функциями (например, соответствующими усреднениями), то u есть предел в $H^{1,s}(\Omega)$ гладких функций на $\bar{\Omega}$. Следовательно, $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^{1,\infty}(\Omega) \subset H^{1,s}(\Omega)$, $1 \leqslant s < \infty$, и липшицевы функции плотны в $H^{1,s}(\Omega)$.

В приведенном рассуждении липшицевость границы использовалась только в одном месте, а именно при доказательстве существования продолжения $\tilde{u}$. Но по известному варианту теоремы Титце о продолжении функция $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$ допускает продолжение до функции $\tilde{u} \in H_0^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ для *любой* ограниченной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (см. например, книгу Стейна [1]). Следовательно, и для таких областей $H^{1,\infty}(\Omega)$ плотно в $H^{1,s}(\Omega)$, $s < \infty$.

Пусть снова граница $\partial\Omega$ липшицева. Тогда если область Ω_0 такова, что $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \Omega_0$, то любую функцию $u \in H^{1,s}(\Omega)$, $1 \leqslant s < \infty$, можно продолжить до функции $\tilde{u} \in H^{1,s}(\Omega_0)$. Кроме того, если $u \geqslant 0$ п.в. в Ω, то $\tilde{u} \geqslant 0$ п.в. в Ω_0.

По неравенству Пуанкаре существует такое число $\beta > 0$, что

$$\int_\Omega \zeta^2\, dx \leqslant \beta \int_\Omega \zeta_x^2\, dx, \qquad \zeta \in H_0^1(\Omega),$$

где $\zeta_x = (\zeta_{x_1}, \ldots, \zeta_{x_N}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\zeta, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\zeta\right)$. Следовательно, $\|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)}$ — норма в $H_0^1(\Omega)$, эквивалентная норме (4.1). Мы всегда будем считать, что

$$\|\zeta\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)}.$$

Пространства $H^{m,s}(\Omega)$ и $H_0^{m,s}(\Omega)$ при $1 < s < \infty$ являются рефлексивными банаховыми пространствами, а $H^m(\Omega)$ и $H_0^m(\Omega)$ — гильбертовыми пространствами.

Определение 4.5. Мы обозначаем пространство, двойственное к $H_0^{m,s}(\Omega)$, через $H^{-m,s'}(\Omega)$, $(1/s)+(1/s')=1$, или просто через $H^{-m}(\Omega)$, если $s=2$.

Элементы $H^{-1,s'}(\Omega)$ можно рассматривать как обобщенные производные функций из $f_i \in L^{s'}(\Omega)$; точнее говоря, если $f \in H^{-1,s'}(\Omega)$, то найдутся такие функции $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{s'}(\Omega)$, что

$$\langle f, \zeta\rangle = \int_\Omega \left\{f_0\zeta - \sum_1^N f_i\zeta_{x_i}\right\} dx, \quad \zeta \in H_0^{1,s}(\Omega).$$

Перейдем теперь к дальнейшим приложениям теоремы 2.1 — доказательству существования слабых решений в классических граничных задачах для уравнения Лапласа.

Задача Дирихле. *Пусть $f \in H^{-1}(\Omega)$ и $g \in H^1(\Omega)$. Требуется найти такую функцию $u \in H^1(\Omega)$, что*

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega; \quad u = g \text{ на } \partial\Omega. \tag{4.2}$$

Когда $f=f_0$, g и u — гладкие функции, смысл задачи (4.2) понятен. Поясним, что значит слабое решение этой задачи. Предполагая достаточную гладкость всех функций, умножим обе части уравнения (4.2) на $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда после интегрирования по частям получим

$$(u, \zeta)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\, dx = \int_\Omega f\zeta\, dx.$$

Здесь и в дальнейшем принимается следующее соглашение: по повторяющимся индексам производится суммирование. Заметим далее, что в общем случае мы можем придать лишь обобщенный смысл утверждению «$u=g$ на $\partial\Omega$», поскольку утверждение «$\zeta=0$ на $\partial\Omega$» имеет лишь обобщенный смысл, а именно что $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Итак, $u \in H^1(\Omega)$ называется *слабым решением* задачи (4.2), если

$$\int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\, dx = \langle f, \zeta\rangle \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega), \ u-g \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Запишем теперь нашу задачу в виде вариационного неравенства. Рассмотрим для этого линейное многообразие $M = M_g = \{v \in H^1(\Omega) |$

$v-g\in H_0^1(\Omega)\}$. Тогда вопрос о нахождении слабого решения задачи Дирихле равносилен следующей задаче:

Задача 4.6. *Найти*

$$u\in M:\quad \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \langle f,\ v-u\rangle \quad \forall v\in M.$$

Билинейная форма $u,\ v \to \int_\Omega u_{x_i}v_{x_i}\,dx$ (являющаяся скалярным произведением на $H_0^1(\Omega)$), очевидно, не коэрцитивна на всем пространстве $H^1(\Omega)$. Поэтому рассуждаем так. В силу тождества

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx=\int_\Omega (u-g)_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx+\int_\Omega g_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx,$$

функция u будет решением задачи 4.6 в том и только том случае, если $w=u-g$ — решение вариационного неравенства

$$\int_\Omega w_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \langle f,\ v-u\rangle - \int_\Omega g_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx. \tag{4.4}$$

Но так как $g_{x_i}\in L^2(\Omega)$, $1\leqslant i\leqslant N$, то тем самым задача 4.6 равносильна нахождению функции

$$w\in H_0^1(\Omega):\quad \int_\Omega w_{x_i}(\zeta-w)_{x_i}\,dx \geqslant \langle F,\ \zeta-w\rangle \quad \forall\zeta\in H_0^1(\Omega), \tag{4.5}$$

где $F\in H^{-1}(\Omega)$ определено соотношением $\langle F,\ \zeta\rangle=\langle f,\ \zeta\rangle - \int_\Omega g_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx$. По теореме 2.1 существует решение w этой задачи. Но тогда ясно, что $u=w+g$ — решение задачи 4.6.

Следующий более общий результат предлагается доказать читателю. *Если a — билинейная коэрцитивная форма на $H_0^1(\Omega)$ и $K\subset H^1(\Omega)$ — такое замкнутое выпуклое множество, что $K-K=\{u-v\mid u,\ v\in K\}\subset H_0^1(\Omega)$, то для любого $f\in H^{-1}(\Omega)$*

$$\exists u\in K:\quad a(u,\ v-u)\geqslant\langle f,\ v-u\rangle \quad \forall v\in K.$$

В задаче 4.6 (или см. ее другую формулировку (4.5)) в качестве выпуклого множества выступает все пространство $H_0^1(\Omega)$. Следовательно,

$$\int_\Omega w_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx=\langle F,\ \zeta\rangle \quad \forall\zeta\in H_0^1(\Omega),$$

и, значит, $w+g=u$ — решение (4.3).

Более общая постановка задачи Дирихле заключается в нахождении такого u, что

$$-\Delta u+\lambda u=f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u=g \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Снова умножая здесь уравнение на функцию $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$ и выполняя интегрирование по частям, приходим к следующей задаче.

Задача 4.7. *Найти такую функцию* $u \in M = \{v \in H^1(\Omega) \mid v - g \in H_0^1(\Omega)\}$, *что*

$$a(u, \zeta) = \langle f, \zeta \rangle \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega), \tag{4.6}$$

$$\text{где} \quad a(v, \zeta) = \int_\Omega v_{x_i} \zeta_{x_i}\, dx + \lambda \int_\Omega v\zeta\, dx \quad \forall v, \zeta \in H^1(\Omega).$$

Мы утверждаем, что форма a коэрцитивна на $H_0^1(\Omega)$, если $\lambda > -1/\beta$, где β — константа в неравенстве Пуанкаре. Действительно, для каждого $t \in (0, 1)$

$$a(v, v) = t \int_\Omega v_x^2\, dx + (1-t) \int_\Omega v_x^2 dx + \lambda \int_\Omega v^2\, dx \geqslant$$

$$\geqslant t \int_\Omega v_x^2\, dx + \left[\frac{1}{\beta} - \frac{t}{\beta} + \lambda\right] \int_\Omega v^2\, dx.$$

Выберем теперь t так, чтобы $0 < t < \beta[(1/\beta) + \lambda] = 1 + \beta\lambda$; тогда $a(v, v) \geqslant t \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Отсюда следует (как и в предыдущем случае), что существует единственное слабое решение задачи Дирихле.

Далее будет рассмотрена

Задача Неймана 4.8. *В классической ситуации (когда* $\partial\Omega$, f, g *гладкие) требуется найти такую функцию* u, *что*

$$-\Delta u + \lambda u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial u/\partial n = g \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где $\partial/\partial n$ — *производная по направлению внешней нормали к* $\partial\Omega$.

Умножая уравнение на $\zeta \in C^1(\bar{\Omega})$ и интегрируя по частям, получаем

$$a(u, \zeta) = \int_\Omega f\zeta\, dx + \int_{\partial\Omega} g\zeta d\sigma, \tag{4.7}$$

$$\text{где} \quad \int_\Omega f\zeta\, dx = \int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\, dx + \lambda \int_\Omega u\zeta\, dx.$$

Выбирая любое $\lambda > 0$ и $\alpha = \min(1, \lambda)$, находим, что $a(v, v) \geqslant \alpha \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Однако если положить $\lambda = 0$, то форма a станет некоэрцитивной, и в этом случае задача Неймана не всегда имеет решение, а когда имеет, то необязательно единственное.

Смешанная задача 4.9. *Пусть* $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \overline{\partial_2\Omega}$ *и* $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$. *Мы хотим найти такую функцию* u, *что*

$$\begin{gathered} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \partial_1\Omega, \quad \partial u/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \partial_2\Omega. \end{gathered} \tag{4.8}$$

При $\lambda > 0$ оператор $-\Delta + \lambda$ приводит к коэрцитивной билинейной форме, как показано выше. При $\lambda = 0$ форма еще остается

коэрцитивной, если граница $\partial_1\Omega$ достаточно большая, а именно такая, что гарантируется существование такого $\beta > 0$, для которого

$$\int_\Omega \zeta^2\,dx \leqslant \beta \int_\Omega \zeta_x^2\,dx \quad \forall \zeta \in C^\infty(\bar\Omega),\ \zeta = 0 \text{ на } \partial_1\Omega.$$

Это выполняется, например, когда Ω — связная область с гладкой границей и $\partial_1\Omega$ имеет непустую внутренность в $\partial\Omega$.

В приведенных выше задачах рассматривались только их слабые решения. Возникает естественный вопрос: в каком смысле эти решения соответствуют их классическим аналогам? Что касается задач Дирихле 4.6 и 4.7 и задачи Неймана 4.8, то их решения обладают той же гладкостью, что и данные соответствующих задач (Берс и др. [1]). Решение смешанной задачи, вообще говоря, удовлетворяет условию Гёльдера, а бо́льшая гладкость уже связана со специальной согласованностью данных задачи.

В этой связи сформулируем один точный результат о гладкости слабого решения задачи Дирихле. Он будет полезен при изучении задач с препятствиями, которое мы начнем в § 6.

Теорема 4.10. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с достаточно гладкой границей и*

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad -\Delta u = f \text{ в } \Omega.$$

Тогда если $f \in H^{m,s}(\Omega)$, то $u \in H^{m+2,s}(\Omega)$, $1 < s < \infty$.

Выражение «$-\Delta u = f$ в Ω» здесь означает, естественно, что

$$\int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega f\zeta\,dx \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega).$$

За доказательством этой теоремы мы отсылаем к книге Морри.

В этом параграфе были рассмотрены билинейные коэрцитивные формы, причем (ради простоты изложения) только такие, которые связаны со специальным дифференциальным оператором второго порядка $-\Delta$.

В следующих параграфах мы будем иметь дело с более общими дифференциальными операторами второго порядка, а именно с дифференциальными операторами дивергентного типа, имеющими измеримые ограниченные коэффициенты.

Пусть функции $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, N$, таковы, что

$$(1/\Lambda)\,\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ п. в. в } \Omega \tag{4.9}$$

и $\Lambda \geqslant 1$. Положим

$$a(v, u) = \int_\Omega a_{ij}(x)\,u_{x_j}(x)\,v_{x_i}(x)\,dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \tag{4.10}$$

Эта форма коэрцитивна на $H_0^1(\Omega)$, поскольку

$$a(v, v) \geqslant (1/\Lambda)\,\|v_x\|^2_{L^2(\Omega)} = (1/\Lambda)\,\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

5. СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Начнем с обсуждения понятия неравенства в смысле $H^1(\Omega)$. Допустим, что Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega$.

Определение 5.1. Пусть $u \in H^1(\Omega)$ и $E \subset \bar{\Omega}$. Будем говорить, что функция *u неотрицательна на E в смысле* $H^1(\Omega)$, или, короче, *$u \geqslant 0$ на E в* $H^1(\Omega)$, если существует такая последовательность $u_n \in H^{1,\infty}(\Omega)$, что

$$u_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in E; \qquad u_n \to u \quad \text{в} \quad H^1(\Omega). \tag{5.1}$$

Если $-u \geqslant 0$ на E в $H^1(\Omega)$, то *u неположительна на E в* $H^1(\Omega)$, или, короче, *$u \leqslant 0$ на E в* $H^1(\Omega)$. Если же $u \geqslant 0$ и $u \leqslant 0$ на E в $H^1(\Omega)$, то будем говорить, что *$u = 0$ на E в* $H^1(\Omega)$. Подобным же образом мы говорим, что *$u \leqslant v$ на E в* $H^1(\Omega)$, если $v - u \geqslant 0$ на E в $H^1(\Omega)$. Беря здесь в качестве v константу, приходим к следующему определению:

$$\sup_E u = \inf \{M \in \mathbb{R} \mid u \leqslant M \text{ на } E \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

Отметим, что совокупность неотрицательных функций на $E \subset \Omega$ в $H^1(\Omega)$ образует замкнутый выпуклый конус в $H^1(\Omega)$. Поэтому, согласно теореме Банаха — Сакса[1]), достаточно требовать, чтобы $u_n \to u$ слабо в $H^1(\Omega)$.

Сравним введенное отношение $\geqslant$ в $H^1(\Omega)$ с отношением $\geqslant$ п. в. в Ω.

Предложение 5.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $E \subset \bar{\Omega}$ и $u \in H^1(\Omega)$.*

(i) *Если $u \geqslant 0$ на E в $H^1(\Omega)$, то $u \geqslant 0$ п. в. в E.*

(ii) *Если $u \geqslant 0$ п. в. в Ω, то $u \geqslant 0$ на Ω в $H^1(\Omega)$.*

(iii) *Если $u \in H_0^1(\Omega)$ и $u \geqslant 0$ п. в. в Ω, то существует последовательность $u_n \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$, такая что $u_n \geqslant 0$ в Ω и $u_n \to u$ в $H_0^1(\Omega)$.*

(iv) *Если E открыто в Ω и $u \geqslant 0$ п. в. в E, то $u \geqslant 0$ на K в $H^1(\Omega)$ для любого компакта $K \subset E$.*

Доказательство. (i) Пусть u_n — последовательность из определения 5.1. Тогда, в частности, $u_n \to u$ в $L^2(\Omega)$. Следовательно, существует подпоследовательность в u_n, которая сходится к u п. в. в Ω, и так как $u_n \geqslant 0$, то $u \geqslant 0$ п. в. в E.

(ii) Пусть $v_n \in H^{1,\infty}(\Omega)$ — такая последовательность, что $v_n \to u$ в $H^1(\Omega)$ и п. в. в Ω. По условию $u = \max(u, 0)$ п. в. в Ω, и мы имеем

$$\|\max(v_n, 0) - u\|_{L^2(\Omega)} = \|\max(v_n, 0) - \max(u, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \|v_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

---

[1]) См. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Пер. с франц. — М.: Мир, 1979, с. 92. — *Прим. перев.*

Кроме того, $\int\limits_{\Omega} \max(v_n, 0)_x^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} v_{nx}^2\,dx \leqslant C$, и поэтому из последовательности $\max(v_n, 0)$ можно выделить слабо сходящуюся в $H^1(\Omega)$ последовательность, предел которой, очевидно, есть u. Так как $\max(v_n, 0) \geqslant 0$, то, согласно замечанию перед предложением 5.2, $u \geqslant 0$ на Ω в $H^1(\Omega)$.

(iii) Нужно взять $v_n \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ и рассуждать совершенно аналогично предыдущему случаю.

(iv) Пусть $K \subset E$ — компакт и функция $\zeta \in C_0^\infty(R^N)$ такова, что

$$\zeta = 1 \text{ в } \left\{x \mid \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus E, K)\right\},$$
$$\zeta = 0 \text{ в } \mathbb{R}^N \setminus E$$

и $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Пусть, далее, φ_ε — регуляризирующее семейство функций с $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$. Положим

$$w_n(x) = u * \varphi_{\varepsilon_n}(x) = \int\limits_{B_{\varepsilon_n}(0)} u(y)\,\varphi_{\varepsilon_n}(x-y)\,dy,$$

где $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $\varepsilon_0 < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\mathbb{R}^N \setminus E, K)$. Ясно, что $w_n \geqslant 0$ на K. Если теперь $v_n \in H^{1,\infty}(\Omega)$ и $v_n \to u$ в $H^1(\Omega)$, то $u_n = \zeta w_n + (1-\zeta) v_n$ — искомая последовательность. ∎

Читатель, однако, не должен думать, что введенное выше новое отношение порядка сводится к сравнению функций п. в. В § 6 введенный порядок будет использован для определения емкости множества, и мы увидим, что множество меры нуль (например, замкнутый интервал в $\mathbb{R}^2$) может иметь положительную емкость. Следующее утверждение иллюстрирует роль неравенств в смысле $H^1(\Omega)$ в слабом принципе максимума.

Предложение 5.3. *Пусть $u \in H^1(\Omega)$ — такая функция, что*

$$\sup_{\partial\Omega} u = M = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid u \leqslant m \text{ на } \partial\Omega \text{ в } H^1(\Omega)\} < +\infty.$$

Тогда для любого $k \geqslant M$ имеем $\max(u-k, 0) \in H_0^1(\Omega)$ и $\max(u-k, 0) \geqslant$ на Ω в $H^1(\Omega)$.

Доказательство. Для того чтобы доказать включение $\max(u-k, 0) \in H_0^1(\Omega)$, достаточно найти такую последовательность $v_n \in H^{1,\infty}(\Omega)$, что $v_n \to \max(u-k, 0)$ слабо в $H^1(\Omega)$.

Согласно предположениям, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $u_n^\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$, что $k - u_n^\varepsilon + \varepsilon > 0$ на $\partial\Omega$ и $k - u_n^\varepsilon + \varepsilon \to k - u + \varepsilon$ в $H^1(\Omega)$ при $n \to \infty$. Выбирая здесь $\varepsilon = 1/n$ и обозначая $u_n^\varepsilon = u_n$, получаем, что $k + (1/n) - u_n > 0$ на $\partial\Omega$ и $u_n \to u$ в $H^1(\Omega)$. Следовательно, липшицевы функции $v_n = \max(u_n - (1/n) - k, 0)$ имеют компактный носитель в Ω. Кроме того (см. приложение A), $v_n \to \max(u-k, 0)$ слабо в $H^1(\Omega)$, и тем самым $\max(u-k, 0) \in H_0^1(\Omega)$.

Наконец, заметим, что $\max(u-k, 0)\geqslant 0$ п. в. в Ω и, таким образом, $\max(u-k, 0)\geqslant 0$ на Ω в $H^1(\Omega)$ по предложению 5.2 (ii). ▮

Принцип максимума, о котором пойдет речь ниже, относится к уравнениям дивергентного типа с измеримыми ограниченными коэффициентами. Пусть функции $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$ таковы, что

$$(1/\Lambda)\,\xi^2\leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda\xi^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N \text{ п.в. в } \Omega \tag{5.2}$$

и $\Lambda\geqslant 1$. Положим

$$a(u, v)=\int_\Omega a_{ij}(x)\,u_{x_j}(x)\,v_{x_i}(x)\,dx, \quad u, v\in H^1(\Omega).$$

Тогда определен оператор L: $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$, $\langle Lu, v\rangle=a(u, v)$, $u, v\in H_0^1(\Omega)$. Мы часто будем писать, что

$$Lu=-(\partial/\partial x_i)\left(a_{ij}u_{x_j}\right)\in H^{-1}(\Omega).$$

Нигде не предполагается, что (a_{ij}) — симметричная матрица. Задача Дирихле для оператора L имеет единственное решение. Это устанавливается с помощью теоремы 2.1, подобно тому как в задаче 4.6. Другими словами, справедлива

Теорема 5.4. *Пусть* $Lu=-(\partial/\partial x_i)\left(a_{ij}u_{x_j}\right)$, *где* a_{ij} *удовлетворяют* (5.2). *Тогда для каждых* $\varphi\in H^1(\Omega)$ *и* $f\in H^{-1}(\Omega)$ *существует единственная функция*

$$u\in H^1(\Omega):\quad Lu=f \text{ в } \Omega,\ u=\varphi \text{ на } \partial\Omega.$$

Перейдем, наконец, к формулировке принципа максимума.

Теорема 5.5. *Пусть* $u\in H^1(\Omega)$ — *решение задачи:*

$$Lu=0 \text{ в } \Omega,\quad u=\varphi \text{ на } \partial\Omega,$$

где $Lu=-(\partial/\partial x_i)\left(a_{ij}u_{x_j}\right)$, *функции* a_{ij} *удовлетворяют* (5.2) *и* $\varphi\in H^1(\Omega)$. *Тогда* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$.

Выражение $\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$ понимается в смысле $H^1(\Omega)$. Мы предполагаем, что оно конечно, так как в противном случае доказывать нечего.

Доказательство. Достаточно показать, что $u\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}\varphi$ на Ω в $H^1(\Omega)$. Действительно, если это доказано, то, поскольку $-u$ есть решение исходной задачи с граничным значением $-\varphi$, справедливо также и неравенство $-u\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}(-\varphi)$ на Ω в $H^1(\Omega)$, и утверждение теоремы следует из предложения 5.2 (i).

Согласно предложению 5.3, $\zeta=\max(u-M, 0)\in H_0^1(\Omega)$ и поэтому

$$0=a(u, \zeta)=\int_\Omega a_{ij}u_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx. \tag{5.3}$$

Разобьем множество Ω на два подмножества $\{x \mid \zeta(x) > 0\}$ и $\{x \mid \zeta(x) = 0\}$. Так как (см. приложение A)

$$\zeta_{x_i} = 0 \text{ п. в. в } \{x \mid \zeta(x) = 0\}, \quad \zeta_{x_i} = u_{x_i} \text{ п. в. в } \{x \mid \zeta(x) > 0\},$$

то отсюда вытекает, что $u_{x_j}(x)\zeta_{x_i}(x) = \zeta_{x_j}(x)\zeta_{x_i}(x)$ п. в. в Ω. Подставляя это в (5.3), получим

$$0 = a(u, \zeta) = \int_\Omega a_{ij}\zeta_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx = a(\zeta, \zeta) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\Lambda}\int_\Omega \zeta_{x_i}^2\,dx = \frac{1}{\Lambda}\|\zeta\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Следовательно, $\zeta = 0$ в $H_0^1(\Omega)$, и тем самым $u - M \leqslant 0$ на Ω в $H^1(\Omega)$. ∎

Отметим одно обобщение принципа максимума (доказательство см. в приложении B). Если u — решение задачи:

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где $f = f_0 + \sum_1^N (f_i)x_i$, $f_i \in L^s(\Omega)$, $0 \leqslant i \leqslant N$, то $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_s \sum_0^N \|f_i\|_{L^s(\Omega)}$ при $s > N$.

Определение 5.6. Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *суперрешением* для L, или *L-суперрешением*, если

$$a(u, \zeta) \geqslant 0 \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega): \quad \zeta \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.4}$$

Аналогично u есть *L-субрешение*, если

$$a(u, \zeta) \leqslant 0 \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega): \quad \zeta \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Для суперрешений справедлив принцип минимума. Его доказательство (аналогичное доказательству 5.5) мы опускаем.

Теорема 5.7. *Пусть $u \in H^1(\Omega)$ есть L-суперрешение. Тогда*

$$u(x) \geqslant \inf_{\partial\Omega} u \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Интересным свойством суперрешений является то, что если u и v — два L-суперрешения, то $\min(u, v)$ — снова суперрешение. Этот факт будет доказан в следующем параграфе.

6. ЗАДАЧА С ПРЕПЯТСТВИЕМ. НАЧАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

В этом параграфе мы в основном рассматриваем задачу с препятствием для уравнения Лапласа, но начать удобнее с более общего случая. Как и прежде, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и функции $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ таковы, что

$$(1/\Lambda)\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ п. в. в } \Omega. \tag{6.1}$$

Положим

$$a(u, v)=\int_\Omega a_{ij}(x)\,u_{x_j}(x)\,v_{x_i}(x)\,dx, \quad u, v\in H^1(\Omega), \tag{6.2}$$

и определим оператор L: $H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$, полагая

$$\langle Lu, v\rangle=a(u, v), \quad u, v\in H_0^1(\Omega).$$

Напомним, что если $a_{ij}\in C^1(\bar\Omega)$, то $Lu(x)=-(\partial/\partial x_i)(a_{ij}(x)\,u_{x_j}(x))$, $u\in C^2(\Omega)$, — эллиптический оператор в классическом смысле.

Пусть $\psi\in H^1(\Omega)$, $\psi\leqslant 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$ и

$$K=K_\psi=\{v\in H_0^1(\Omega)\mid v\geqslant\psi \text{ на } \Omega \text{ в } H^1(\Omega)\}\,^{1)}.$$

Заметим, что по предложению 5.2 $v\in K$ тогда и только тогда, когда $v\in H_0^1(\Omega)$ и $v\geqslant\psi$ п. в. в Ω.

Задача 6.1. *Пусть $f\in H^{-1}(\Omega)$. Требуется найти*

$$u\in K:\quad a(u, v-u)\geqslant\langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in K.$$

Теорема 6.2. *Существует единственное решение задачи* 6.1.

Это сразу следует из теоремы 2.1, так как, в силу (6.1), $a(v, v)\geqslant$ $\geqslant(1/\Lambda)\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ при $v\in H_0^1(\Omega)$, т. е. форма a коэрцитивна.

Если $a_{ij}=a_{ji}$, то решение задачи 6.1 есть решение следующей задачи минимизации:

$$\min_{v\in K}\{a(v, v)-2\langle f, v\rangle\}. \tag{6.3}$$

Приведем одно полезное свойство решения задачи 6.1.

Определение 6.3. Будем говорить, что функция $g\in H^1(\Omega)$ есть *$L-f$-суперрешение*, если

$$\langle Lg-f, \zeta\rangle\equiv a(g, \zeta)-\langle f, \zeta\rangle\geqslant 0 \quad \forall 0\leqslant\zeta\in H_0^1(\Omega).$$

В частности, решение u задачи 6.1 есть $L-f$-суперрешение, поскольку $u+\zeta\in K$ для всех $0\leqslant\zeta\in H_0^1(\Omega)$.

В дальнейшем мы не различаем высказывания «$u\geqslant 0$ на Ω в $H^1(\Omega)$» и «$u\geqslant 0$ п. в. в Ω» (см. предложение 5.2).

Теорема 6.4. *Пусть u — решение задачи* 6.1 *и g — такое $L-f$-суперрешение, что $g\geqslant\psi$ в Ω и $g\geqslant 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. Тогда $u\leqslant g$ в Ω.*

Доказательство. Так как $g\geqslant\psi$ в Ω и $g\geqslant 0$ на $\partial\Omega$, то $\zeta=\min(u, g)\in K$ и тем самым $a(u, \zeta-u)\geqslant\langle f, \zeta-u\rangle$. Далее, $\zeta-u=$ $=\min(u, g)-u\leqslant 0$, и потому $a(g, \zeta-u)\leqslant\langle f, \zeta-u\rangle$. Из этих неравенств вытекает, что $a(g-u, \zeta-u)\leqslant 0$.

---

1) Функция ψ и задает препятствие (obstacle). — *Прим. перев.*

Теперь проведем вычисление величины $a(g-u,\ \zeta-u)$ (с учетом того, что $\zeta=\min(u,\ g)$) в явном виде:

$$0\geqslant a(g-u,\ \zeta-u)=\int\limits_{\Omega}a_{ij}(g-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i}\,dx=$$
$$=\int\limits_{\{x\mid g<u\}}a_{ij}(g-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega}a_{ij}(\zeta-u)_{x_j}(\zeta-u)_{x_i}\,dx=$$
$$=a(\zeta-u,\ \zeta-u)\geqslant(1/\Lambda)\,\|\zeta-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Это значит, что $\zeta=u$, и, следовательно, $u\leqslant g$ в Ω. ∎

Отсюда вытекает такое

Следствие 6.5. *Пусть u — решение задачи* 6.1 *при $f=0$ и $\psi\leqslant M$ в Ω, где $M\geqslant 0$. Тогда $u\leqslant M$ в Ω.*

Для доказательства достаточно положить $g=M$ в теореме 6.4.

Задачу 6.1 мы решили ради простоты лишь для нулевых условий Дирихле на границе $\partial\Omega$. Заметим, однако, что вариационное неравенство может быть решено и с множеством

$$K=\{v\in H^1(\Omega)\mid v\geqslant\psi\quad\text{в}\quad\Omega,\quad v-\varphi\in H_0^1(\Omega)\},$$

где $\varphi\in H^1(\Omega)$ и $\varphi\geqslant\psi$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$. В некотором смысле это равносильно решению задачи 4.7.

Покажем, что вариационное неравенство с множеством K действительно имеет решение. Для этого рассмотрим новое выпуклое множество $K_0=\{\eta\in H_0^1(\Omega)\mid\eta\geqslant\psi-\varphi$ в $\Omega\}$. По теореме 6.2 существует единственный элемент

$$\zeta\in K_0\colon\ a(\zeta,\ \eta-\zeta)\geqslant\langle F,\ \eta-\zeta\rangle\quad\forall\eta\in K_0,\tag{6.4}$$

где $F\in H^{-1}(\Omega)$ определено равенством $\langle F,\ \xi\rangle=\langle f,\ \xi\rangle-a(\varphi,\ \xi)$, $\xi\in H_0^1(\Omega)$. Положим $u=\zeta+\varphi$ и проверим, что

$$a(u,\ v-u)\geqslant\langle f,\ v-u\rangle\quad\forall v\in K.\tag{6.5}$$

Пусть $v\in K$; тогда $\eta=v-\varphi\in H_0^1(\Omega)$ и $\eta\geqslant\psi-\varphi$ в Ω, т. е. $\eta\in K_0$. Следовательно, по неравенству (6.4)

$$a(u,\ v-u)=a(\zeta+\varphi,\ \eta-\zeta)=a(\zeta,\ \eta-\zeta)+a(\varphi,\ \eta-\zeta)\geqslant$$
$$\geqslant\langle f,\ \eta-\zeta\rangle-a(\varphi,\ \eta-\zeta)+a(\varphi,\ \eta-\zeta)=$$
$$=\langle f,\ \eta-\zeta\rangle=\langle f,\ v-u\rangle.$$

Итак, $u=\zeta+\varphi$ — решение вариационного неравенства (6.5).

Заметим, что аналогичным образом можно обобщить теорему 6.4 и следствие 6.5.

Теорема 6.6. *Пусть u и v — два $L-f$-суперрешения. Тогда $w=\min(u,\ v)$ тоже $L-f$-суперрешение.*

Доказательство. Положим

$$K=\{\eta\in H^1(\Omega)\mid\eta\geqslant w\ \text{п. в. в}\ \Omega,\ \eta-w\in H_0^1(\Omega)\}$$

и допустим, что

$$\zeta \in K: \quad \int_\Omega a_{ij}\zeta_{x_j}(\eta-\zeta)_{x_i}\,dx \geqslant \langle f, \eta-\zeta\rangle \quad \forall \eta \in K. \tag{6.6}$$

Согласно теореме 6.4[1]), $\zeta \leqslant u$ и $\zeta \leqslant v$ в Ω, следовательно, $\zeta \leqslant \min(u, v)$ в Ω. Но $\zeta \in K$, т. е. $\zeta \geqslant \min(u, v) = w$, и поэтому $\zeta = w$. Остается только заметить, что решение (6.6) является $L - f$-суперрешением. ∎

Определение 6.7. Пусть $u \in H^1(\Omega)$. Будем говорить, что $u(x) > 0$ в $x \in \Omega$ в смысле $H^1(\Omega)$, если существуют окрестность $B_\rho(x)$ и функция $\varphi \in H_0^{1,\infty}(B_\rho(x))$, $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi(x) > 0$, такие что $u - \varphi \geqslant 0$ на $B_\rho(x)$ в $H^1(\Omega)$.

Ясно, что множество $\{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ открыто.

Пусть u — решение задачи 6.1 с «препятствием» ψ. Разобьем Ω на два подмножества: открытое множество $\{x \in \Omega \mid u(x) > \psi(x)\}$ и его дополнение $I = I[u]$, которое, очевидно, замкнуто в Ω. Фактически I — это множество точек x, где $u(x) = \psi(x)$.

Определение 6.8. Множество I называется *множеством примыкания*, или *коинцидентным множеством*, решения u.

Пусть $x_0 \in \Omega \setminus I$. По определению существуют шар $B_\rho(x_0)$ и функция $\varphi \in C_0^\infty(B_\rho(x_0))$, $\varphi > 0$ в $B_{\rho/2}(x_0)$, такие что $u \geqslant \psi + \varphi$ в $H^1(B_\rho(x_0))$. Следовательно, для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(B_{\rho/2}(x_0))$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $u + \varepsilon\zeta \geqslant \psi + \frac{1}{2}\varphi$ в $H^1(B_{\rho/2}(x_0))$. Поскольку $v = u + \varepsilon\zeta \in K$, то, подставляя эту функцию в вариационное неравенство и деля затем на ε, получим

$$a(u, \zeta) \geqslant \langle f, \zeta\rangle \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(B_{\rho/2}(x_0)).$$

Так как это верно, в частности, и для $-\zeta$, то

$$a(u, \zeta) = \langle f, \zeta\rangle \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(B_{\rho/2}(x_0)).$$

Другими словами, $Lu = f$ в $\Omega \setminus I$, и, кроме того,

$$u = \psi \text{ на } I. \tag{6.7}$$

Свойство (6.7), конечно, не характеризует полностью решение u, но, тем не менее, интересно отметить, что поскольку

$$a(u, \zeta) - \langle f, \zeta\rangle \geqslant 0 \quad \forall 0 \leqslant \zeta \in H_0^1(\Omega),$$

то по теореме Рисса — Шварца (Шварц [1]) найдется такая неотрицательная мера Радона μ на Ω, что

$$a(u, \zeta) - \langle f, \zeta\rangle = \int_\Omega \zeta\,d\mu \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega).$$

[1]) И вследствие замечания перед теоремой 6.6. — *Прим. перев.*

Тогда, согласно (6.7), мера μ сосредоточена в I. Итак, доказана

Теорема 6.9. *Пусть u — решение задачи 6.1. Тогда существует неотрицательная мера Радона μ на Ω, такая что $Lu=f+\mu$ в Ω и*

$$\operatorname{supp}\mu\subset I=\{x\in\Omega\mid u(x)=\psi(x)\}.$$

В частности, $Lu=f$ в $\Omega\setminus I$.

Теперь нашей ближайшей целью является установление связей между мерой и емкостью. Пусть E — компактное подмножество Ω и

$$K_E=\{v\in H_0^1(\Omega)\mid v\geqslant 1 \text{ на } E \text{ в } H^1(\Omega)\}.$$

Ясно, что это выпуклое замкнутое множество в $H_0^1(\Omega)$.

Определение 6.10. *Емкостью множества E* относительно Ω называется величина

$$\operatorname{cap}E=\operatorname{cap}_\Omega E=\inf_{v\in K_E}\int_\Omega v_x^2\,dx. \tag{6.8}$$

Говорят, что множество $F\subset\Omega$ имеет *нулевую емкость*, если $\operatorname{cap}E=0$ для любого компакта $E\subset F$.

Нижняя грань в (6.8) всегда достигается. Действительно, существует единственная функция

$$\alpha\in K_E\colon\quad \int_\Omega \alpha_{x_i}(v-\alpha)_{x_i}\,dx\geqslant 0\qquad \forall v\in K_E, \tag{6.9}$$

и понятно[1]), что она есть решение минимизационной задачи (6.8). Функцию α называют потенциалом проводника E или емкостным потенциалом E (относительно Ω). Если $\zeta\in H_0^1(\Omega)$ и $\zeta\geqslant 0$, то $\alpha+\zeta\in K_E$ и потому $\int_\Omega \alpha_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx\geqslant 0$. Следовательно, α есть $(-\Delta)$-суперрешение, и по теореме 5.7 $\alpha\geqslant 0$ в Ω. С другой стороны, $\min(\alpha,\ 1)\in K_E$ и

$$\int_\Omega \min(\alpha,\ 1)_x^2\,dx=\int_{\{x\mid\alpha(x)<1\}}\alpha_x^2\,dx\leqslant\int_\Omega \alpha_x^2\,dx=\operatorname{cap}E.$$

(Здесь неравенство $\alpha(x)<1$ понимается в смысле п. в. и используется теорема A.1.) Но α — единственный минимум интеграла Дирихле в K_E, так что $\alpha=\min(\alpha,\ 1)$, и тем самым $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ в Ω.

Пусть, далее, $v_n\in K_E\cap H^{1,\infty}(\Omega)$ и $v_n\to\alpha$ в $H^1(\Omega)$. Положим

$$\theta(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

[1]) См. замечание после теоремы 6.2. — *Прим. перев.*

Тогда $w_n = \theta(v_n) \in K_E \cap H^{1,\infty}(\Omega)$, $w_n = 1$ на E и

$$\int_\Omega w_{nx}^2\,dx \leqslant \int_{\{x \mid 0 < v_n(x) < 1\}} v_{nx}^2\,dx \leqslant \int_\Omega v_{nx}^2\,dx \to \operatorname{cap} E.$$

Отсюда и из правила параллелограмма следует, что $w_n \to \alpha$ в $H_0^1(\Omega)$, и мы получаем, согласно определению 5.1, что $\alpha = 1$ на E в $H^1(\Omega)$.

Наконец, если $x \in \Omega \setminus E$ и $U \subset \Omega \setminus E$ — окрестность x, то $\alpha + \zeta \in K_E$ для любого $\zeta \in C_0^\infty(U)$, и тем самым

$$\int_\Omega \alpha_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = 0 \qquad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega \setminus E).$$

Итак, доказаны следующие свойства функции $\alpha \in H_0^1(\Omega)$:

$$-\Delta\alpha \geqslant 0 \text{ в } \Omega, \qquad -\Delta\alpha = 0 \text{ в } \Omega \setminus E,$$

$$\alpha = 1 \quad \text{на} \quad E \quad \text{в} \quad H^1(\Omega), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ в } \Omega.$$

Как и раньше, по теореме Рисса — Шварца найдется такая мера $m = m_E$, что $-\Delta\alpha = m$ в Ω, т. е.

$$\int_\Omega \alpha_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega \zeta\,dm \qquad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega).$$

Обозначим через $g(x, y) = g_\Omega(x, y)$ функцию Грина для оператора $-\Delta$ в Ω. Тогда по теореме Рисса о представлении получим, что $\alpha(x) = \int_\Omega g(x, y)\,dm(y)$, $x \in \Omega$, и, следовательно, если формально воспользоваться двумя последними равенствами, положив $\zeta = \alpha$, то получим

$$\operatorname{cap} E = \int_\Omega \alpha_x^2\,dx = \int_\Omega \alpha\,dm(x) = \int_\Omega\int_\Omega g(x, y)\,dm(y)\,dm(x).$$

Используя свойства функции Грина, эту формулу нетрудно обосновать непосредственными вычислениями.

Теорема 6.11. *Пусть* $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$, u — *решение задачи* 6.1 *для* $f = f_0 + \sum(\partial/\partial x_i) f_i \in H^{-1}(\Omega)$ *и* μ — *мера, соответствующая* u. *Тогда существует такая константа* $C > 0$, *что* $\mu(E) \leqslant C(\operatorname{cap} E)^{1/2}$ *для каждого компакта* $E \subset \Omega$. *В частности, если* $\operatorname{cap} E = 0$, *то* $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Мы предполагаем, естественно, что $K_\psi \neq \varnothing$ (т. е. $\psi \leqslant 0$ на $\partial\Omega$). Пусть $0 \leqslant \zeta \in C_0^1(\Omega)$ и $\zeta \geqslant 1$ на E. Тогда

$$\mu(E) \leqslant \int_\Omega \zeta\,d\mu = \int_\Omega a_{ij}u_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx - \int_\Omega \left\{f_0\zeta - \sum_1^N f_i\zeta_{x_i}\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant n^2\Lambda \|u_x\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\beta}\,\|f_0\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \left(\sum_1^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)}\right) \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)} = C\|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)},$$

где для оценки интеграла $\int\limits_{\Omega} f_0\zeta\, dx$ мы воспользовались неравенством Пуанкаре. Поскольку множество $C_0^1(\Omega)\cap K_E$ плотно в K_E, то

$$\mu(E) \leqslant C \inf_{\zeta\in K_E} \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)} = C(\operatorname{cap} E)^{1/2}. \blacksquare$$

Следствие 6.12. *Пусть u — решение задачи* 6.1 *и I — его коинцидентное множество. Тогда если* $\operatorname{cap} I = 0$, *то* $Lu = f$ *в* Ω.

Следует отметить, что предположения теоремы 6.11 могут быть ослаблены. Действительно, наилучшая константа C в этой теореме удовлетворяет неравенству $C \leqslant C_0\{\|u_x\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\}$, где C_0 зависит от билинейной формы a и области Ω. Таким образом, C связано с ψ только через $\|u_x\|_{L^2(\Omega)}$, и поэтому, в частности, утверждение теоремы справедливо для каждой функции $\psi \in L^\infty(\Omega)$, для которой $K_\psi \neq \emptyset$.

Вопросы, связанные с гладкостью решения u, будут широко обсуждаться в гл. IV. Здесь же только заметим, что нельзя ожидать принадлежности решения классу $C^2(\Omega)$. В самом деле, пусть $N=1$, $\Omega = (-3, 3)$, $\psi(x) = 1 - x^2$ и

$$a(u, v) = \int\limits_{-3}^{3} u'v'\,dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Решение задачи 6.1 для $f=0$ дается функцией, которая склеена из кусков параболы ψ и касательных к ней (ибо такая функция есть наименьшее суперрешение, принадлежащее K), но она принадлежит только классу C^1. Подобные задачи (и с иной точки зрения) будут рассмотрены в следующем параграфе.

7. ЗАДАЧА С ПРЕПЯТСТВИЕМ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Перед тем как обсуждать общие вопросы гладкости решения задачи с препятствием, мы изучим ее одномерный вариант. При этом заметим, что если $\Omega = (\alpha, \beta)$ — открытый интервал в $\mathbb{R}$, то $H^1(\Omega)$ — это совокупность абсолютно непрерывных функций u на (α, β), производные которых u' принадлежат $L^2(\Omega)$, а $H_0^1(\Omega)$ — подпространство функций из $H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в α и β. Пусть

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega\} \neq \emptyset,$$

где $\psi \in H^1(\Omega)$, $\max\limits_{\Omega} \psi > 0$ и $\psi(\alpha) < 0$, $\psi(\beta) < 0$. Положим

$$a(u, v) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u'(x)v'(x)\,dx, \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Ясно, что это коэрцитивная билинейная форма на $H_0^1(\Omega)$. По теореме 2.1 для каждого $f \in H^{-1}(\Omega)$ существует единственная функция

$$u \in K: \quad a(u, v-u) \geqslant \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K.$$

Из результатов § 6 вытекает существование такой неотрицательной меры μ с носителем в коинцидентном множестве $I=\{x\in\Omega\,|\,u(x)=\psi(x)\}$, что

$$-u''=f+\mu \tag{7.1}$$

(в смысле обобщенных функций). Поскольку $\psi(\alpha)<0$ и $\psi(\beta)<0$, то I компактно в Ω и по теореме 6.11 $\mu(\Omega)=\mu(I)<\infty$. Мера μ неотрицательна, и поэтому существует неубывающая функция φ, для которой $\varphi'=\mu$ (в обобщенном смысле). Понятно, что $\varphi(x)=\mu([\alpha, x))$. Кроме того, так как $f\in H^{-1}(\Omega)$, то $f=F'$, где $F\in L^2(\Omega)$.

Уравнение (7.1) теперь можно записать в виде $-u''=F'+\varphi'$, откуда получаем, что

$$u'(x)=-(F(x)+\varphi(x)+\text{const}).$$

Заметим, что если $F\in L^p(\Omega)$, $p>1$, т. е. если $f\in H^{-1,p}(\Omega)$, то $u\in H^{1,p}(\Omega)$. Действительно, функция φ ограничена в Ω и, следовательно, $u\in C^{0;\lambda}(\Omega)$ при $\lambda=1-(1/p)$.

Предположим далее, что F непрерывна. Тогда функция u' непрерывна на множестве $\Omega\setminus I=\{x\in\Omega\,|\,u(x)>\psi(x)\}$ и поэтому может иметь разрывы только в точках I.

Так как φ — неубывающая функция, то $\varphi(x-0)\leqslant\varphi(x+0)$ при $x\in\Omega$ и, стало быть,

$$u'(x-0)\geqslant u'(x+0),\quad x\in\Omega. \tag{7.2}$$

Пусть $\xi\in I$; тогда $u(\xi)=\psi(\xi)$ и $u(x)-u(\xi)\geqslant\psi(x)-\psi(\xi)$. Если $x<\xi$, то

$$[u(x)-u(\xi)]/(x-\xi)\leqslant[\psi(x)-\psi(\xi)]/(x-\xi)$$

и, следовательно, $u'(\xi-0)\leqslant\psi'(\xi-0)$. Если же $x>\xi$, то

$$[u(x)-u(\xi)]/(x-\xi)\geqslant[\psi(x)-\psi(\xi)]/(x-\xi)$$

и потому $u'(\xi+0)\geqslant\psi'(\xi+0)$.

Теорема 7.1. *Если дополнительно к предыдущим предположениям функция* ψ *имеет разрывы вида* $\psi'(x-0)\leqslant\psi'(x+0)$, *то* u' *— непрерывная функция.*

Действительно,

$$u'(\xi-0)\leqslant\psi'(\xi-0)\leqslant\psi'(\xi+0)\leqslant u'(\xi+0),\quad \xi\in I,$$

и, согласно (7.2), $u'(\xi-0)=u'(\xi+0)$, т. е. u' непрерывна.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

В этом приложении для удобства читателя собраны отдельные факты о пространствах действительных функций $H^{m,s}(\Omega)$. Систематическое исследование свойств этих пространств представлено в моно-

графии Морри [1, гл. 3] [1]). Мы начинаем с того, что даем два доказательства теоремы А.1 (см. ниже). В первом из них находит применение «абсолютно непрерывное представление» (лемма А.2), а во втором используется подходящий выбор пробной функции (леммы А.3 и А.4). Затем мы указываем некоторые обобщения теоремы А.1, рассматриваем оператор следа и доказываем лемму об $H^{1,s}$-склейке.

Далее формулируются и доказываются некоторые леммы типа Соболева и Пуанкаре. В заключение дается формулировка хорошо известной теоремы Реллиха, доказательство которой может быть найдено у Морри [1].

Теорема А.1. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *и* $u\in H^{1,s}(\Omega)$, $1\leqslant s\leqslant\infty$. *Тогда* $\max(u,\ 0)\in H^{1,s}(\Omega)$ *и для* $1\leqslant i\leqslant N$

$$[\max(u,\ 0)]_{x_i}=\begin{cases} u_{x_i} & \text{в } \{x\in\Omega\mid u(x)>0\},\\ 0 & \text{в } \{x\in\Omega\mid u(x)\leqslant 0\}\end{cases} \tag{А.1}$$

в смысле обобщенных функций.

Поясним суть этой теоремы: производные $\max(u,\ 0)$ определены почти всюду по формуле (А.1). В частности, для любой пробной функции ζ

$$-\int_\Omega \max(u,\ 0)\,\zeta_{x_i}\,dx=\int_\Omega [\max(u,\ 0)]_{x_i}\,\zeta\,dx=\int_{\Omega\cap\{u>0\}} u_{x_i}\,\zeta\,dx.$$

Теорему достаточно доказать для случая, когда $u\in H_0^{1,s}(\Omega)$, $1\leqslant s<+\infty$. Поскольку ζ имеет компактный носитель, то случай $s=+\infty$ соответствует теореме Радемахера о дифференцируемости липшицевых функций, которая предполагается известной.

Лемма А.2. *Пусть* $v\in H_0^{1,s}(\Omega)$, $1\leqslant s\leqslant\infty$. *Тогда для каждого* i, $1\leqslant i\leqslant N$, *существует представляющая* v *функция* $\tilde v_i$, *которая абсолютно непрерывна почти на всех прямых, параллельных оси* x_i *в* Ω. *Кроме того,* $(\partial/\partial x_i)\tilde v_i=\tilde h_i$ *п. в. в* Ω, *где* $\tilde h_i$ — *представление* $h_i\in L^s(\Omega)$, *т. е. обобщенной производной* v *по* x_i.

Доказательство. Пусть $v_m\in C_0^1(\Omega)$ — такая последовательность, что

$$v_m\to v \text{ в } H_0^{1,s}(\Omega),\quad v_m\to v \text{ п. в. в } \Omega.$$

Продолжим функции v_m и v нулем за пределы Ω; тогда

$$v_m(x)=\int_{-\infty}^{x_i}(\partial v_m/\partial x_i)(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ t,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_N)\,dt,$$

[1]) См. также Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977; Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — *Прим. перев.*

где интеграл берется по прямой, проходящей через точку x параллельно оси x_i. Для каждой функции $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_m(x)\,\zeta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} v_{mx_i}\,dt\right)\zeta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} v_{mx_i}(x)\left(\int_{x_i}^{\infty} \zeta\,dt\right)dx.$$

Далее, последовательность $\{v_{mx_i}\}$ сходится в $L^s(\Omega)$ к функции h_i, являющейся обобщенной производной v по x_i, и поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x)\,\zeta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} h_i(x)\left(\int_{x_i}^{\infty} \zeta\,dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} h_i\,dt\right)\zeta(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что v почти всюду совпадает с функцией $\tilde{v}_i$, которая абсолютно непрерывна почти на всех прямых, параллельных оси x_i, а ее производная $\partial\tilde{v}/\partial x_i = \tilde{h}_i$ представляет $h_i \in L^s(\Omega)$.

Таким образом, равенства $v_{x_i} = \lim v_{mx_i} = h_i$ можно понимать как в смысле $L^s(\Omega)$, так и п. в. в Ω (для некоторой подпоследовательности v_{mx_i}). ∎

Доказательство теоремы A.1. Покажем сначала, что $\max(u, 0) \in H^{1,s}(\Omega)$, $1 < s < \infty$. Пусть $u_n \in C^1(\Omega)$ и $u_n \to u$ в $H^{1,s}(\Omega)$. Ясно, что функции $\max(u_n, 0)$ липшицевы и удовлетворяют неравенствам

$$\|\max(u_n, 0)\|_{H_0^{1,s}(\Omega)} \leqslant \|u_n\|_{H_0^{1,s}(\Omega)} \leqslant C \tag{A.2}$$

с некоторым $C > 0$. Далее, так как $\max(u, 0) \in L^s(\Omega)$, то, очевидно,

$$\|\max(u_n, 0) - \max(u, 0)\|_{L^s(\Omega)} \leqslant \|u_n - u\|_{L^s(\Omega)}. \tag{A.3}$$

Из (A.2) вытекает, что последовательность $\{\max(u_n, 0)\}$ слабо сходится к некоторому элементу из $H_0^{1,s}(\Omega)$, а из (A.3) следует, что этот элемент п. в. совпадает с $\max(u, 0)$.

Применим теперь лемму A.2 к функции $v = \max(u, 0)$. Пусть $\tilde{v}_i$ и $\tilde{u}_i$ — представления функций v и u соответственно, а $\tilde{h}_i$ и $\tilde{g}_i$ — представления их обобщенных производных, определенных в этой лемме.

Покажем сначала, что если F — любое подмножество Ω, где $v = 0$, то $\tilde{h}_i = 0$ п. в. в F, или, что то же самое,

$$\int_F \tilde{h}_i^2\,dx = 0. \tag{A.4}$$

Для этого заметим, во-первых, что F можно заменить его подмножеством той же меры, где $\tilde{v}_i = 0$, а во-вторых, согласно теореме Фубини (см. (A.4)), достаточно доказать, что $\tilde{h}_i = 0$ п. в. в $F \subset \mathbb{R}$, т. е. доказать утверждение для функции лишь одного переменного x_i.

Если $F\subset\mathbb{R}$, то $F=F'\cup\tilde{N}$, где F' плотно в F и $\operatorname{mes}\tilde{N}=0$. В $F'\subset\mathbb{R}$ функция $\tilde{v}_i$ п. в. дифференцируема, и понятно, что

$$\tilde{h}_i=(\partial/\partial x_i)\,\tilde{v}_i=0 \quad \text{п. в. в } F'.$$

Пусть, наконец, E — любое подмножество в Ω, где $v=u$. Мы хотим показать, что $\tilde{h}_i-\tilde{g}_i=0$ п. в. в E. Рассуждаем аналогично предыдущему. После замены E его подмножеством той же меры, где $\tilde{u}_i=\tilde{v}_i$, нужно только доказать (по теореме Фубини), что $\tilde{h}_i=\tilde{g}_i$ п. в. в $E\subset\mathbb{R}$. Но последнее снова просто проверяется на плотном подмножестве $E'\subset E$. ∎

Теорема А.1 может быть выведена также из следующих двух лемм.

Лемма А.3. *Пусть* $\theta\in C^1(\mathbb{R})$ *и* $|\theta'(t)|\leqslant M$. *Тогда если* $u\in H^{1,s}(\Omega)$, *где* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — *ограниченное открытое множество и* $1\leqslant s<+\infty$, *то* $\theta(u)\in H^{1,s}(\Omega)$ *и*

$$(\partial/\partial x_i)\,\theta(u)=\theta'(u)\,(\partial u/\partial x_i) \ \textit{п. в. в } \Omega, \quad i=1,\ \ldots,\ N. \tag{A.5}$$

Доказательство. Поскольку $u\in H^{1,s}(\Omega)$, то найдется последовательность функций $\{u_n\}$ из $C^1(\bar{\Omega})$, такая что $u_n\to u$ в $H^{1,s}(\Omega)$ и $u_n\to u$ п. в. в Ω. Ясно, что $\theta(u_n)\in C^1(\bar{\Omega})$, и так как $|\theta(u_n)-\theta(u)|\leqslant M|u_n-u|$, то $\theta(u_n)$ сходится к $\theta(u)$ в $L^s(\Omega)$.

С другой стороны, $\theta'(u_n)(\partial u_n/\partial x_i) = (\partial/\partial x_i)\,\theta(u_n)\to\theta'(u)(\partial u/\partial x_i)$ в $L^s(\Omega)$. Действительно,

$$\theta'(u_n)(\partial u_n/\partial x_i)-\theta'(u)(\partial u/\partial x_i)=\theta'(u_n)\left[(\partial u_n/\partial x_i)-(\partial u/\partial x_i)\right]+ \\ +\left[\theta'(u_n)-\theta'(u)\right](\partial u/\partial x_i)=A_n+B_n,$$

где $A_n\to 0$ в $L^s(\Omega)$, а $B_n\to 0$ п. в. в Ω и $|B_n|^s\leqslant(2M)^s|\partial u/\partial x_i|^s$. Следовательно, по теореме Лебега $B_n\to 0$ в $L^s(\Omega)$.

Теперь остается заметить, что обобщенная производная $(\partial/\partial x_i)\,\theta(u)$ есть предел в $L^s(\Omega)$ функций $(\partial/\partial x_i)\,\theta(u_n)$. Лемма доказана.

Если $u\in H^{1,s}(\Omega)$ — такая функция, что $u\colon\Omega'\to(\alpha,\beta)$, где $\Omega'\subset\Omega$ и $\theta\in C^1((\alpha,\beta))$, то (А.5) выполняется п. в. в Ω'.

Лемма А.4. *Пусть* $u\in H^{1,s}(\Omega)$. *Тогда*

$$\partial u/\partial x_i=0 \ \textit{п. в. в } E=\{x\in\Omega\,|\,u=0\}, \quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

Доказательство. Для каждых $\gamma\in[-1,\ 1]$ и $\varepsilon>0$ положим

$$\sigma_{\gamma\varepsilon}(t)=\begin{cases} -1, & -\infty<t\leqslant-\varepsilon(1+\gamma),\\ \gamma+(t/\varepsilon), & -\varepsilon(1+\gamma)<t<\varepsilon(1-\gamma),\\ 1, & \varepsilon(1-\gamma)\leqslant t<\infty,\end{cases}$$

так что $\sigma_{\gamma\varepsilon}(0)=\gamma$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_{\gamma\varepsilon}(t)=\operatorname{sgn}_\gamma(t)=\begin{cases} -1, & t<0,\\ \gamma, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Пусть далее

$$\theta_{\gamma\varepsilon}(t) = \int_0^t \sigma_{\gamma\varepsilon}(\tau)\,d\tau, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Ясно, что $\theta_{\gamma\varepsilon} \in C^1(\mathbb{R})$ и $|\theta'_{\gamma\varepsilon}(t)| \leqslant 1$. Следовательно, $\theta_{\gamma\varepsilon} \in H^{1,s}(\Omega)$ и

$$(\partial/\partial x_i)\,\theta_{\gamma\varepsilon}(u) = \sigma_{\gamma\varepsilon}(u)\,(\partial/\partial x_i)\,u \ \text{ п. в. в } \Omega, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Поскольку $\theta_{\gamma\varepsilon}(u) \to |u|$ п.в. в Ω при $\varepsilon \to 0$ и $|\theta_{\gamma\varepsilon}(u)| \leqslant |u| \in L^s(\Omega)$, то $\theta_{\gamma\varepsilon}(u) \to |u|$ в $L^s(\Omega)$. Более того, при $\varepsilon \to 0$

$$(\partial/\partial x_i)\,\theta_{\gamma\varepsilon}(u) \to (\operatorname{sgn}_\gamma u)\,(\partial/\partial x_i)\,u \ \text{ п.в. в } \Omega,$$

и так как $|(\partial/\partial x_i)\,\theta_{\gamma\varepsilon}(u)| \leqslant |(\partial/\partial x_i)\,u| \in L^s(\Omega)$, то

$$(\partial/\partial x_i)\,\theta_{\gamma\varepsilon}(u) \to (\operatorname{sgn}_\gamma u)\,(\partial/\partial x_i)\,u \quad \text{в} \quad L^s(\Omega).$$

Таким образом, $|u| \in H^{1,s}(\Omega)$ и

$$(\partial/\partial x_i)\,|u| = (\operatorname{sgn}_\gamma u)\,(\partial/\partial x_i)\,u \ \text{ п.в. в } \Omega.$$

В частности, $(\partial/\partial x_i)\,|u| = \gamma\,(\partial/\partial x_i)\,u$ п.в. в E для каждого $\gamma \in [-1, 1]$ и, следовательно,

$$(\partial/\partial x_i)\,|u| = (\partial/\partial x_i)\,u = 0 \quad \text{п.в. в } E. \ \blacksquare$$

Несколько проще эту лемму можно доказать, используя упр. 15.

Из леммы A.4 сразу следует, что $(\partial/\partial x_i)\max(u, 0) = 0$ п.в., где $u \leqslant 0$, и $(\partial/\partial x_i)\ (\max(u, 0) - u) = 0$ п. в., где $u \geqslant 0$, т. е. тем самым получено еще одно доказательство теоремы A.1. Приведем теперь два ее обобщения.

Следствие A.5. *Пусть* $\theta(t)$, $-\infty < t < \infty$, — *кусочно-линейная функция, производная которой разрывна лишь в точках* $\{a_1, \ldots, a_M\}$, *и* $u \in H^{1,s}(\Omega)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. *Тогда* $\theta(u) \in H^{1,s}(\Omega)$ *и* $\theta(u)_{x_i} = \theta'(u)\,u_{x_i}$ *(в смысле обобщенных функций), где обе части этого равенства считаются равными нулю, когда* $x \in \bigcup_j \{y \mid u(y) = a_j\}$.

В частности, $\min(u, 0)$, $|u| \in H^{1,s}(\Omega)$.

Доказательство этого простого утверждения мы опускаем. Заметим только, что по лемме A.4, примененной к $\theta(u)$ и u,

$$(\partial/\partial x_i)\,\theta(u) = 0 = (\partial/\partial x_i)\,u \ \text{ п.в. в } \bigcup_j \{y \mid u(y) = a_j\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

чем и оправдывается соглашение в формулировке следствия.

Более тонкое уточнение леммы A.4 представляет собой

Следствие A.6. *Пусть* θ — *липшицева функция на* $\mathbb{R}$, *производная которой существует всюду, за исключением, быть может, множества* $\{a_1, \ldots, a_M\}$, *и* $u \in H^{1,s}(\Omega)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$. *Тогда* $\theta(u) \in H^{1,s}(\Omega)$ *и*

$$\theta(u)_{x_i} = \theta'(u)\,u_{x_i} \quad \text{(в смысле обобщенных функций).} \tag{A.6}$$

Перейдем теперь к доказательству леммы об $H^{1,s}$-склейке, которая будет полезна при изучении задач со свободной границей. В нем используется понятие следа функции из $H^{1,s}$. Пусть, например, $G=\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|<1,\ x_N>0\}$ и $\Sigma=\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|<1,\ x_N=0\}$. Оператор следа T: $H^{1,s}(G)\to L^s(\Sigma)$ линеен, непрерывен и обладает таким свойством:

$$Tv(x)=v(x',\ 0)\qquad \forall v\in H^{1,\infty}(G)\subset H^{1,s}(G),$$

где $x=(x',\ x_N)\in\mathbb{R}^N$. Более того, обозначая через $T_\varepsilon v$ след v на $\Sigma_\varepsilon=G\cap\{x\mid x_N=\varepsilon\}$, легко проверить, что

$$T_\varepsilon v\to Tv\quad \text{в}\quad L^s(\Sigma)\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0.$$

Пусть теперь $\zeta\in H^{1,s}(G)$ и $T\zeta=0$. Отождествим ζ с ее представлением, которое абсолютно непрерывно на каждом отрезке, параллельном оси x_N. Существование такого представления следует из леммы А.2. По теореме Лебега найдется такая последовательность $\{\varepsilon_j\}$, что $\zeta(x',\ \varepsilon_j)\to 0$ при $\varepsilon_j\to 0$ для п.в. $x'\in\Sigma$.

Продолжим ζ нулем в область $G^-=\{x\mid |x|<1,\ x_N<0\}$. Для каждого x', такого что $\lim\zeta(x',\ \varepsilon_j)=0$, функция $\zeta(x',\ x_N)$ переменного x_N, $|x_N|<1$, абсолютно непрерывна и

$$\int\limits_{-(1-|x'|^2)^{1/2}}^{(1-|x'|^2)^{1/2}} |\zeta_{x_N}(x',\ x_N)|^s\,dx_N=\int\limits_0^{(1-|x'|^2)^{1/2}} |\zeta_{x_N}(x',\ x_N)|^s\,dx_N.$$

Следовательно, по теореме Фубини $\zeta_{x_N}\in L^s(B)$, где $B=\{x\mid |x|<1\}$. Легко показать, что и $\zeta_{x_i}\in L^s(B)$, если $i<N$. Таким образом, продолжив функцию $\zeta\in H^{1,s}(G)$ (для которой $\zeta=0$ на Σ) нулем на G^-, мы получим элемент из $H^{1,s}(B)$.

Отсюда ясно, что $\zeta=0$ в Σ в том смысле, что $\zeta=\lim\zeta_n$ в $H^{1,s}(\Omega)$, где $\zeta_n\in H^{1,\infty}(G)$ и $\zeta_n=0$, когда $x_N\leqslant 1/n$.

Наконец, заметим, что справедливо и обратное утверждение: если $\zeta\in H^{1,\infty}(G)$ есть предел гладких функций ζ_n, равных нулю в окрестности Σ, то $T\zeta=\lim T\zeta_n=0$. Итак, доказана

Лемма А.7. *Пусть $\zeta\in H^{1,s}(G)$, $1\leqslant s<\infty$. Тогда $T\zeta=0$ в Σ в том и только в том случае, когда ζ принадлежит замыканию по норме $H^{1,s}(G)$ множества гладких функций, обращающихся в нуль в окрестности Σ.*

Из этого утверждения выводим лемму об $H^{1,s}$-склейке.

Лемма А.8. *Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^N$, $G^+=\{x\in B\mid x_N>0\}$, $G^-=\{x\in B\mid x_N<0\}$, $\Sigma=B\cap\{x_N=0\}$, и пусть $v^+\in H^{1,s}(G^+)$, $v^-\in H^{1,s}(G^-)$ таковы, что $Tv^+=Tv^-$ в Σ. Тогда функция*

$$v(x)=\begin{cases} v^+(x), & x\in G^+,\\ v^-(x), & x\in G^-,\end{cases}$$

принадлежит $H^{1,s}(B)$.

Доказательство. Положим $w(x)=v^-(x', -x_N)$, если $x\in G^+$. Тогда $w\in H^{1,s}(G^+)$ и $Tv^+=Tw$ в Σ. Следовательно, $T(w-v^+)=0$ в Σ.

Пусть $\zeta_\varepsilon\in H^{1,\infty}(G)$ — такая последовательность липшицевых функций, что $\zeta_\varepsilon=0$ в Σ и $\zeta_\varepsilon\to w-v^+$ в $H^{1,s}(G)$ при $\varepsilon\to 0$, а $v_\varepsilon^+\in H^{1,\infty}(G^+)$ — последовательность, которая сходится к v^+ в $H^{1,s}(G^+)$. Рассмотрим функции

$$v_\varepsilon(x)=\begin{cases} v_\varepsilon^+(x), & x\in G^+\cup\Sigma,\\ v_\varepsilon^+(x', -x_N)+\zeta_\varepsilon(x', -x_N), & x\in G^-.\end{cases}$$

Они, очевидно, липшицевы в B, и ясно, что

$$\|v_\varepsilon-v\|_{L^s(B)}\leqslant\|v_\varepsilon^+-v\|_{L^s(G^+)}+\|\zeta_\varepsilon-(w-v_\varepsilon^+)\|_{L^s(G^+)}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Кроме того, $\|v_x\|_{L^s(B)}\leqslant\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}\|v_{\varepsilon x}\|_{L^s(B)}\leqslant\|v_x^+\|_{L^s(G)}+\|v_x^-\|_{L^s(G)}$ и тем самым $v\in H^{1,s}(B)$. ∎

Перейдем к формулировкам и доказательствам лемм Соболева.

Лемма A.9 (Соболев). *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — открытое ограниченное множество с липшицевой границей $\partial\Omega$ и $u\in H^{1,s}(\Omega)$, $1\leqslant s<\infty$. Тогда*

(i) *если $1\leqslant s<N$, то $u\in L^{s^*}(\Omega)$, где $1/s^*=(1/s)-(1/N)$, и $\|u\|_{L^{s^*}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)}$;*

(ii) *если $s>N$, то $u\in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, где $\lambda=1-(N/s)$, и $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}\leqslant C\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)}$, где константы зависят только от, s и $N\Omega$.*

Первое утверждение этой леммы вытекает из следующего полезного неравенства для функций из $H_0^{1,s}(\Omega)$.

Лемма A.10. *Если $1\leqslant s<N$, то справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L^{s^*}(\Omega)}\leqslant C(s^*/1^*)\|u_x\|_{L^s(\Omega)},\quad u\in H_0^{1,s}(\Omega),$$

с константой C, зависящей только от N.

Отсюда и из неравенства Гёльдера следует неравенство Пуанкаре, которое мы сформулируем в удобной для нас форме.

Следствие A.11. *Пусть $u\in H_0^1(B_r)$, $B_r=\{x\in\mathbb{R}^N\mid |x|<r\}$. Тогда*

$$\int\limits_{B_r}u(x)^2\,dx\leqslant Cr^2\int\limits_{B_r}u_x(x)^2\,dx,\quad u\in H_0^1(B_r),\tag{A.7}$$

где C зависит только от N.

Доказательство леммы A.10. Предположим сначала, что неравенство справедливо при $s=1$, и покажем, что тогда оно выполняется и при $s>1$. Действительно, если $u\in C_0^1(\Omega)$, то $|u|^{s^*/1^*}\in$

$\in H_0^{1,1}(\Omega)$ и, следовательно,

$$\left(\int_\Omega |u|^{s^*}\,dx\right)^{1/1^*} \leqslant C(s^*/1^*)\int_\Omega |u|^{(s^*/1^*)-1}\,|u_x|\,dx.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\left(\int_\Omega |u|^{s^*}\,dx\right)^{(1/1^*)-(1/s')} \leqslant C(s^*/1^*)\left(\int_\Omega |u_x|^s\,dx\right)^{1/s}.$$

Так как $(1/1^*)-(1/s')=(1/s^*)$, то требуемое доказано.

Остается рассмотреть случай $s=1$. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_N)\in\mathbb{R}^N$. Из неравенств

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_i |u_{x_i}(\xi)|\,d\xi_i, \quad i=1, 2, \ldots, N,$$

где интегралы берутся по прямым $\xi_i=x_i$, $i=1, 2, \ldots, N$, мы выводим, что

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leqslant \frac{1}{2^{1^*}}\prod_i\left(\int_i |u_{x_i}(\xi)|\,d\xi_i\right)^{1/(N-1)}.$$

Производя теперь последовательное интегрирование по переменным $x_1, \ldots, x_N$ и применяя неравенство Гёльдера[1]), получим

$$\int_1 |u(x)|^{N/(N-1)}\,dx_1 \leqslant (1/2^{1^*})\left(\int_1 |u_{x_1}(\xi)|\,d\xi_1\right)^{1/(N-1)} \times$$
$$\times\left(\int_1\int_2 |u_{x_2}(\xi)|\,d\xi_1\right)^{1/(N-1)}\cdots\left(\int_1\int_N |u_{x_N}(\xi)|\,dx_1\,d\xi_N\right)^{1/(N-1)},$$

$$\int_1\int_2 |u(x)|^{N/(N-1)}\,dx_1\,dx_2 \leqslant (1/2^{1^*})\left(\int_1\int_2 |u_x(x)|\,d\xi_1\,dx_2\right)^{1/(N-1)}\cdots$$
$$\cdots\left(\int_1\int_2\int_3 |u_x(x)|\,dx_1\,dx_2\,d\xi_3\right)^{1/(N-1)}\cdots,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\,dx_1\ldots dx_N \leqslant (1/2^{1^*})\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_x(x)|\,dx_1\ldots dx_N\right)^{N/(N-1)}.$$

Таким образом, неравенство доказано для $s=1$ с константой $C=1/2^{1^*}$. ∎

Доказательство леммы А.9 (*ii*). Покажем сначала, что

$$|u(x)| \leqslant C(\operatorname{mes}\Omega)^{-1/s}\left(\|u\|_{L^s(\Omega)}+[1-(N/s)]^{-1}\operatorname{diam}\Omega\,\|u_x\|_{L^s(\Omega)}\right), \qquad \text{(A.8)}$$

---

[1]) Мы пользуемся неравенством

$$\int f_1 f_2\ldots f_k\,dx \leqslant \|f_1\|_{L^{\alpha_1}}\|f_2\|_{L^{\alpha_2}}\cdots\|f_k\|_{L^{\alpha_k}}, \quad (1/\alpha_1)+\ldots+(1/\alpha_k)=1.$$

если $u \in H^{1,s}(\Omega)$. Продолжая функцию u до функции из $H_0^{1,s}(\Omega_0)$, $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ [1]) (продолженную функцию обозначаем той же буквой) так, чтобы $\|u\|_{H_0^{1,s}(\Omega_0)} \leqslant C\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)}$, мы видим, что можно ограничиться рассмотрением функций из $H_0^{1,s}(\Omega)$. Но если $u \in H_0^{1,s}(\Omega)$, то u есть предел функций $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, и поэтому достаточно доказать неравенство (A.8) только для функций из $C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть $x \in \Omega$. Тогда для каждого $y \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = u(y) + \int_0^1 u_x(x + t(y-x))(y-x)\,dt\ ^{2)},$$

после интегрирования которого по переменной y приходим к соотношению

$$\operatorname{mes}\Omega u(x) = \int_\Omega u(y)\,dy + \int_0^1 \int_\Omega u_x(x + t(y-x))(y-x)\,dy\,dt. \quad (A.9)$$

Оценим оба слагаемых в правой части (A.9) по неравенству Гёльдера. Для оценки второго слагаемого

$$I = \int_0^1 \int_\Omega u_x(x + t(y-x))(y-x)\,dy\,dt \quad (A.10)$$

рассмотрим множества $\Omega(t) = \{z = x + t(y-x) \mid z \in \Omega\}$, $t \in [0, 1]$. Легко видеть, что $\operatorname{mes}\Omega(t) = t^N \operatorname{mes}\Omega$. Тогда

$$|I| \leqslant \int_0^1 \int_{\Omega(t)} |u_x(z)|\,|y-x|\,t^{-N}\,dz\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{diam}\Omega \int_0^1 t^{-N} (\operatorname{mes}(\Omega(t)))^{1-(1/s)} \|u_x\|_{L^s(\Omega)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{diam}\Omega\,(\operatorname{mes}\Omega)^{1-(1/s)} \frac{1}{1-(N/s)} \|u_x\|_{L^s(\Omega)},$$

и, следовательно, из (A.9) получаем, что

$$\operatorname{mes}\Omega\,|u(x)| \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1-(1/s)} \left\{\|u\|_{L^s(\Omega)} + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{1-(N/s)} \|u_x\|_{L^s(\Omega)}\right\}. \ \blacksquare$$

В частности, доказана непрерывность функций из $H^{1,s}(\Omega)$ при $s > N$.

Лемма A.12. *Пусть функция* $v \in H^{1,s}(B_r(x))$ *такова, что* $\int_{B_r(x)} v(y)\,dy = 0$. *Тогда* $\|v\|_{L^s(B_r(x))} \leqslant Cr\|v_x\|_{L^s(B_r(x))}$, *где* C *зависит только от* N *и* s.

---

[1]) См. § 4 гл. II, после определения 4.4. — *Прим. перев.*

[2]) Если Ω звездна относительно x, — *Прим. перев.*

Доказательство этого утверждения мы оставляем в качестве упражнения.

Закончим доказательство леммы (A.9) (ii). Пусть $u \in H_0^{1,s}(\Omega)$ и x, $y \in \Omega$, $|x-y| = \delta$. Рассмотрим функцию

$$u - c = u - (1/\mathrm{mes}\, B_\delta) \int\limits_{B_\delta(x)} u(\xi)\, d\xi.$$

Ясно, что интеграл от нее по шару $B_\delta(x)$ равен нулю. Применяя теперь к этой функции неравенство (A.8) и оценивая в нем первый член справа по лемме A.12, получим

$$|u(x) - u(y)| \leqslant |u(x) - c| + |u(y) - c| \leqslant$$
$$\leqslant 2C\delta^{1-(N/s)}\{1 + 2[1 - (N/s)]^{-1}\} \| u_x \|_{L^s(\Omega)},$$

где $C = C(s, N)$. ∎

Другое полезное неравенство относится к функциям, равным нулю на подмножестве B_r.

Лемма A.13. *Пусть $E \subset B_r$ — такое множество, что* $\mathrm{mes}\, E \geqslant \theta\, \mathrm{mes}\, B_r$, $0 < \theta < 1$, *и функция $u \in H^{1,1}(B_r)$ равна нулю п.в. в E. Тогда для каждого $\sigma > 0$*

$$\mathrm{mes}\{x \in B_r \mid |u(x)| > \sigma\} \leqslant \left[\frac{C}{\sigma} \int\limits_{B_r} |u_x(x)|\, dx\right]^{N/(N-1)},$$

где C зависит только от θ.

Доказательство этого утверждения опирается на следующие две леммы.

Лемма A.14. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и*

$$Kf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (f(y)/|x-y|^{N-1})\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

— потенциал первого порядка, порожденный функцией f. Тогда существует константа $C > 0$, такая что

$$\mathrm{mes}\{x \mid |Kf(x)| > \sigma\} \leqslant \left[\frac{C}{\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy\right]^{N/(N-1)} \quad \forall \sigma > 0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Для некоторого $x \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$K^\varepsilon f(x) = \int\limits_{|x-y| \geqslant \varepsilon} (f(y)/|x-y|^{N-1})\, dy,$$

$$K_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|x-y| \leqslant \varepsilon} (f(y)/|x-y|^{N-1})\, dy.$$

Тогда $|K^\varepsilon f(x)| \leqslant \varepsilon^{1-N} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \varepsilon^{1-N}$ и поэтому $|K^\varepsilon f(x)| \leqslant \sigma/2$, если $\varepsilon = (2/\sigma)^{1/(N-1)}$. Следовательно,

$$\mathrm{mes}\{x \mid |Kf(x)| > \sigma\} \leqslant \mathrm{mes}\{x \mid |K_\varepsilon f(x)| > \sigma/2\}.$$

С другой стороны, $K_\varepsilon f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, так как по теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^N} |K_\varepsilon f(x)|\, dx \leqslant \int_{|y| \leqslant \varepsilon} |y|^{1-N}\, dy = C_1 \varepsilon.$$

Таким образом,

$$(\sigma/2) \operatorname{mes}\{x \mid |K_\varepsilon f(x)| > \sigma/2\} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |K_\varepsilon f(x)|\, dx \leqslant C_1 \varepsilon$$

и тем самым

$$\operatorname{mes}\{x \mid |Kf(x)| > \sigma\} \leqslant \operatorname{mes}\{x \mid |K_\varepsilon f(x)| > \sigma/2\} \leqslant$$
$$\leqslant (2C_1/\sigma)\,\varepsilon = C\,(1/\sigma)^{N/(N-1)}. \ \blacksquare$$

Лемма А.15. *Пусть функция* $v \in H^{1,\infty}(B_r)$ *равна нулю на* $E \subset B_r$, *где* $\operatorname{mes} E \geqslant \theta \operatorname{mes} B_r$, $0 < \theta < 1$. *Тогда существует такая константа* $\beta > 0$, *зависящая только от* θ *и* N, *что*

$$|v(x)| \leqslant \beta \int_{B_r} (|v_x(y)|/|x-y|^{N-1})\, dy, \quad x \in B_r.$$

Доказательство. Если $x \in E$, то последнее неравенство выполняется для любого β. Пусть $x \in B_r \setminus E$. Рассмотрим функцию $r \to v(x + r\xi)$, где $\xi \in S^{N-1}$ и $S^{N-1} = \partial B_1(0)$, и положим $\Sigma = \{\xi \in S^{N-1} \mid \exists R > 0\colon\ x + R\xi \in E\}$. Тогда если $x + R\xi \in E$, то из равенства

$$v(x) - v(x + r\xi) = \int_r^0 (dv/d\rho)(x + \rho\xi)\, d\rho$$

следует, что $|v(x)| \leqslant \int_0^R |v_x(x+\rho\xi)|\, d\rho$. Обозначая через $d\omega$ элемент площади поверхности S^{N-1}, а через $|\Sigma|$ меру множества Σ, получим

$$|\Sigma|\,|v(x)| = \int_\Sigma |v(x)|\, d\omega \leqslant \int_\Sigma \int_0^{2r} |v_x(x + \rho\xi)|\, d\rho\, d\omega =$$
$$= \int_\Sigma \int_0^{2r} (|v_x(y)|/|x-y|^{N-1})\, \rho^{N-1}\, d\rho\, d\omega \leqslant 2 \int_{B_r} (|v_x(y)|/|x-y|^{N-1})\, dy.$$

Остается теперь только показать, что $|\Sigma|$ ограничена снизу положительным числом. В самом деле,

$$\theta \operatorname{mes} B_r \leqslant \operatorname{mes} E \leqslant \int_\Sigma d\omega \int_0^{2r} \rho^{N-1}\, d\rho = [(2r)^N/N]\,|\Sigma|.$$

Следовательно, $|\Sigma| \geqslant \theta N\,[\operatorname{mes} B_r/(2r)^N] = \theta\gamma(N) = 1/\beta(\theta, N)$ и тем самым

$$|v(x)| \leqslant \beta(\theta, N) \int_\Omega (|v_x(y)|/|x-y|^{N-1})\, dy. \ \blacksquare$$

Доказательство леммы А.13. Утверждение достаточно доказать для функций $u \in H^{1,\infty}(B_r)$, которые равны нулю на E, где $\operatorname{mes} E \geqslant \theta \operatorname{mes} B_r$. По предыдущей лемме для таких функций

$$\{x \mid |u(x)| \geqslant \sigma\} \subset \{x \mid K(|u_x|)(x) \geqslant \sigma/\beta\}.$$

Следовательно, по лемме А.14

$$\operatorname{mes}\{x \mid |u(x)| \geqslant \sigma\} \leqslant \operatorname{mes}\{x \mid K(|u_x|(x) \geqslant \sigma/\beta\} \leqslant$$
$$\leqslant \left[(C\beta/\sigma) \int_{\mathbb{R}^N} |u_x(x)|\, dx\right]^{N/(N-1)}. \blacksquare$$

Сформулируем без доказательства хорошо известную теорему Реллиха о компактности (Морри [1]).

Теорема А.16. *Пусть* Ω — *ограниченная область с гладкой границей* $\partial\Omega$, $m \geqslant 1$ *и* $1 \leqslant s < \infty$. *Тогда если* $u_n \to u$ *слабо в* $H^{m,s}(\Omega)$, *то* $u_n \to u$ *в* $H^{m-1,s}(\Omega)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕРИМЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом приложении будет получена оценка решения задачи Дирихле

$$Lu = -(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} = f \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

сформулированной в § 5. Эта оценка понадобится в гл. IV. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма В.1. *Пусть* φ — *неотрицательная и невозрастающая функция на* $[k_0, \infty)$, *такая что*

$$\varphi(h) \leqslant [C/(h-k)^\alpha] \, |\varphi(k)|^\beta, \quad h > k > k_0, \tag{B.1}$$

где C, α, β — *положительные константы и* $\beta > 1$. *Тогда*

$$\varphi(k_0 + d) = 0, \tag{B.2}$$

$$d^\alpha = C\,|\varphi(k_0)|^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}. \tag{B.3}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $k_r = k_0 + d - (d/2^r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. По предположению

$$\varphi(k_{r+1}) \leqslant C\,[2^{(r+1)\alpha}/d^\alpha]\, |\varphi(k_r)|^\beta, \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{B.4}$$

Докажем по индукции, что

$$\varphi(k_r) \leqslant \varphi(k_0)/2^{-r\mu}, \quad \text{где } \mu = \alpha/(1-\beta) < 0. \tag{B.5}$$

При $r = 0$ неравенство (В.5) тривиально. Предположим, что оно справедливо при $1, \ldots, r$, и покажем, что тогда оно выполнено и при $r+1$. Действительно, согласно (В.4),

$$\varphi(k_{r+1}) \leqslant C\,[2^{(r+1)\alpha}/d^\alpha]\,[|\varphi(k_0)|^\beta/2^{-r\beta\mu}]$$

и из (B.3) получаем, что $\varphi(k_{r+1}) \leqslant \varphi(k_0)/2^{-(r+1)\mu}$. Правая часть этого выражения стремится к нулю при $r \to +\infty$, и, следовательно, $0 \leqslant \varphi(k_0+d) \leqslant \varphi(k_r) \to 0$. ∎

Теорема B.2. *Пусть функции* $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ *таковы, что*

$$\nu |\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ п.в. в } \Omega$$

и $\nu > 0$. *Пусть, далее,* $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^s(\Omega)$ *при* $s > N$ *и*

$$u \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega a_{ij}u_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega \{f_0\zeta + f_i\zeta_{x_i}\}\,dx, \qquad \zeta \in H_0^1(\Omega). \tag{B.6}$$

Тогда $\max\limits_\Omega |u| \leqslant \frac{K}{\nu}\sum\limits_0^N \|f_i\|_{L^s(\Omega)} (\operatorname{mes}\Omega)^{(1/N)-(1/s)}$, *где* K *не зависит от* ν.

Доказательство. Положим для $k > 0$

$$\zeta = (\operatorname{sgn} u)\max(|u|-k,\ 0) = \begin{cases} u-k, & u \geqslant k, \\ 0, & |u| \leqslant k, \\ u+k, & u \leqslant -k. \end{cases}$$

Согласно следствию A.5 и предложению 5.3, $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Кроме того, $\zeta_{x_i} = u_{x_i}$ на множестве $A(k) = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \geqslant k\}$. Следовательно,

$$\nu \|\zeta_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega a_{ij}\zeta_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega a_{ij}u_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx =$$

$$= \int_{A(k)} \{f_0\zeta + f_i\zeta_{x_i}\}\,dx \leqslant b\left(\sum_0^N \int_{A(k)} f_i^2\,dx\right)^{1/2} \|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)}.$$

Здесь $b = \max(\beta, 1)$, где β — константа в неравенстве Пуанкаре, которым мы воспользовались для оценки первого члена. Отсюда ясно, что

$$\nu \|\zeta\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{\nu}{2}\|\zeta\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{K_1}{\nu}\sum_{i=0}^N \int_{A(k)} f_i^2\,dx.$$

По неравенству Гёльдера

$$\int_{A(k)} f_i^2\,dx \leqslant \left(\int_{A(k)} |f_i|^s\,dx\right)^{2/s} (\operatorname{mes} A(k))^{1-(2/s)\,1)},$$

и поэтому $\|\zeta\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{2K_1}{\nu^2}\sum\limits_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)} [\operatorname{mes} A(k)]^{1-(2/s)}$. Из неравенства

---

1) $s \geqslant 2$, так как $s > N \geqslant 1$. — *Прим. перев.*

Соболева (лемма A.9) получаем $(1/2^* = (1/2) - (1/N))$

$$\left(\int\limits_{A(k)} (|u|-k)^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*} = \left(\int\limits_{\Omega} |\zeta|^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*} \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|\zeta\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{K_1C}{\nu^2} \sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\,[\operatorname{mes} A(k)]^{1-(2/s)}.$$

Если $h > k > 0$, то $A(h) \subset A(k)$ и

$$(h-k)^2\,[\operatorname{mes} A(h)]^{2/2^*} \leqslant \left(\int\limits_{A(h)} (|u|-k)^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*} \leqslant \left(\int\limits_{A(k)} (|u|-k)^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*}.$$

Следовательно,

$$(h-k)^2\,[\operatorname{mes} A(h)]^{2/2^*} \leqslant \frac{K_1C}{\nu^2}\left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\right)[\operatorname{mes} A(k)]^{1-(2/s)},$$

или

$$\operatorname{mes} A(h) \leqslant \frac{K}{\nu^{2^*}\,(h-k)^{2^*}}\left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\right)^{2^*/2} [\operatorname{mes} A(k)]^{\beta},$$

где $\beta = [1-(2/s)] = (2^*/2) = [1-(2/s)]\,[1-(2/N)]^{-1} > 1$, так как $s > N$.

Теперь из леммы B.1 вытекает, что $\operatorname{mes} A(d) = 0$,

$$d = \frac{K}{\nu}\left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\right)^{1/2} (\operatorname{mes}\Omega)^{(1/N)-(1/s)},$$

т. е. $|u(x)| \leqslant d$ п.в. в Ω. ∎

Определение B.3. Будем говорить, что ограниченное открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ принадлежит *классу* S, если найдутся такие числа α, $0 < \alpha \leqslant 1$, и $\rho_0 > 0$, что для любых $x_0 \in \partial\Omega$ и $\rho < \rho_0$

$$\operatorname{mes}(B_\rho(x_0) \setminus \Omega \cap B_\rho(x_0)) \geqslant \alpha \operatorname{mes} B_\rho(x_0).$$

Теорема B.4. *Пусть* $u \in H_0^1(\Omega)$ — *решение уравнения*

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) = \sum_{i=1}^{N} (f_i)_{x_i},$$

где $a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j > \nu|\xi|^2$ $(\nu > 0)$, $|a_{ij}(x)| \leqslant M$, $f_i \in L^s(\Omega)$ *при* $s > N$ *и* Ω *класса* S. *Тогда функция* u *непрерывна по Гёльдеру; точнее говоря, существуют такие числа* $k > 0$ *и* λ, $0 < \lambda < 1$, *зависящие только от* ν, M, Ω *и* N, *что*

$$\operatorname*{osc}_{B_\rho(x)\cap\Omega} u \leqslant k\left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^s(\Omega)}\right)\rho^{\lambda}.$$

Заметим, что правую часть уравнения можно заменить выражением

$$f_0 + \sum_{i=1}^{N} (f_i)_{x_i}, \quad \text{где } f_0 \in L^r(\Omega), \quad r > N/2.$$

Действительно, пусть $V \in H_0^1(D)$: $-\Delta V = f_0$ в $D \supset \bar{\Omega}$; тогда $f_0 = -\sum (\partial/\partial x_i) V_{x_i}$. По неравенству Кальдерона — Зигмунда (мы его напомним в § 2 гл. IV) $V_{x_i x_j} \in L^r(D)$, и из неравенства Соболева теперь следует, что $V_{x_i} \in L^{r^*}(\Omega)$ и $r^* > N$.

Доказательство теоремы B.4 будет дано в приложении C.

ПРИЛОЖЕНИЕ C. ЛОКАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Напомним следующее определение:

Определение C.1. Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ называется множеством *класса* S, если найдутся такие α, $0 < \alpha \leqslant 1$, и $\rho_0 > 0$, что для всех $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\rho < \rho_0$ и $\Omega(x, \rho) = \Omega \cap B_\rho(x)$

$$\operatorname{mes}\{B_\rho(x_0) \setminus \Omega(x_0, \rho)\} \geqslant \alpha \operatorname{mes} B_\rho(x_0). \tag{C.1}$$

Рассмотрим оператор

$$Lu = -\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right)_{x_i} \tag{C.2}$$

и предположим, что

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j, \quad \nu > 0, \quad |a_{ij}(x)| \leqslant M.$$

Основная цель этого и следующего приложений заключается в доказательстве такого результата.

Теорема C.2. *Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$ — решение уравнения*

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} (f_i)_{x_i}, \tag{C.3}$$

где $f_i \in L^s(\Omega)$, $s > N$ и Ω класса S. Тогда u непрерывна по Гёльдеру в $\bar{\Omega}$, или, точнее говоря, существуют такие $K > 0$ и λ, $0 < \lambda < 1$, зависящие только от ν, M, Ω и N, что

$$\underset{\Omega(x,\, \rho)}{\operatorname{osc}} u \leqslant K\left(\sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^s(\Omega)}\right)\rho^\lambda. \tag{C.4}$$

В приложении B мы уже доказали ограниченность решения u. Теперь же мы должны установить для него оценку (C.4). Ее доказательство проведем в несколько этапов. Прежде всего нам необходимы локальные оценки решений, суперрешений и субрешений относительно оператора L.

Определение С.3. Функция $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ называется *локальным L-субрешением*, если

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x)\, u_{x_j} \varphi_{x_i}\, dx \leqslant 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geqslant 0. \tag{C.5}$$

Функция $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ называется *локальным L-суперрешением*, если $-u$ есть локальное L-субрешение, т. е. если имеет место неравенство, противоположное (С.5). Таким образом, локальное решение — это одновременно локальное L-суперрешение и локальное L-субрешение.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой будет приведено чуть ниже.

Теорема С.4. *Пусть u — локальное L-субрешение. Тогда существует такая константа $K = K(\nu, M, N)$, что если $x \in \Omega$ и $\Omega(x, 2\rho) \subset \subset \Omega$, то*

$$\max_{\Omega(x,\,\rho)} u(x) \leqslant K \left\{(1/\rho^N) \int\limits_{\Omega(x,\,2\rho)} u^2\, dx\right\}^{1/2}. \tag{C.6}$$

Следствие С.5. *Пусть u — локальное L-суперрешение. Тогда существует такая константа $K = K(\nu, M, N)$, что если $x \in \Omega$ и $\Omega(x, 2\rho) \subset \subset \Omega$, то*

$$\min_{\Omega(x,\,\rho)} u(x) \geqslant K \left\{(1/\rho^N) \int\limits_{\Omega(x,\,2\rho)} u^2\, dx\right\}^{1/2}. \tag{C.7}$$

Действительно, (С.7) сразу следует из (С.6), так как $-u$ есть локальное L-субрешение.

Теорема С.6. *Если решение u уравнения $Lu = 0$ принадлежит $H^1(\Omega(x, 2\rho))$ и обращается в нуль на $\partial\Omega \cap B_{2\rho}(x)$, то справедливы оценки* (С.6) *и* (С. 7).

Если $x \in \Omega$ и $2\rho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, то эта теорема является элементарным следствием теоремы С.4 и следствия С.5. Если же $x \in \partial\Omega$, то справедливость ее будет видна из доказательства теоремы С.4.

Для доказательства теорем С.4 и С.6 нам понадобятся несколько лемм. Первая из них аналогична лемме В.1.

Лемма С.7. *Пусть $\varphi(h, \rho)$ — действительная неотрицательная функция, определенная для всех $h > k_0$ и $\rho < R_0$, невозрастающая по первому аргументу, неубывающая по второму и удовлетворяющая неравенству*

$$\varphi(h, \rho) \leqslant \frac{C}{(h-k)^\alpha (R-\rho)^\gamma} [\varphi(k, R)]^\beta, \tag{C.8}$$

где $h > k > k_0$, $\rho < R < R_0$ и C, α, β, γ — некоторые положительные константы, причем $\beta > 1$. Тогда если $0 < \sigma < 1$, то

$$\varphi(k_0 + d,\ R_0 - \sigma R_0) = 0, \tag{C.9}$$

$$\text{где}\quad d^\alpha = \frac{2^{(\alpha+\gamma)\beta/(\beta-1)} C\, [\varphi(k_0, R_0)]^{\beta-1}}{\sigma^\gamma R_0^\gamma}. \tag{C.10}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$k_r = k_0 + d - (d/2^r), \quad \rho_r = R_0 - \sigma R_0 + (\sigma R_0/2^r) \tag{C.11}$$

и докажем по индукции, что

$$\varphi(k_r, \rho_r) \leqslant \varphi(k_0, R_0)/2^{\mu r}, \quad \text{где } \mu = (\alpha + \gamma)/(\beta - 1). \tag{C.12}$$

При $r = 0$ (C.12) очевидно. Пусть это неравенство выполнено для $1, \ldots, r$. Покажем, что тогда оно выполнено и при $r+1$. Действительно, из (C.8), (C.10) и (C.12) следует, что

$$\varphi(k_{r+1}, \rho_{r+1}) \leqslant C\left[2^{(\alpha+\gamma)(r+1)}/\left(d^\alpha \sigma^\gamma R_0^\gamma\right)\right][\varphi(k_r, \rho_r)]^\beta \leqslant \varphi(k_0, R_0)/2^{\mu(r+1)}.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to \infty$, получаем (C.9). ∎

Лемма C.8. *Если v — неотрицательное локальное L-субрешение и $\alpha \in C_0^1(\Omega)$, то существует такая константа $K = K(\nu, M, N)$, что*

$$\int_\Omega \alpha^2 v_x^2\, dx \leqslant K \int_\Omega \alpha_x^2 v^2\, dx. \tag{C.13}$$

Доказательство. По предположению

$$\int_\Omega a_{ij}(x)\, v_{x_j} \varphi_{x_i}\, dx \leqslant 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega'),$$

где $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ и $\varphi \geqslant 0$ на Ω'. Подставляя сюда $\varphi = \alpha^2 v$, после несложных преобразований получим (C.13). ∎

Следствие C.9. *При тех же предположениях, что и в лемме* C.8, *справедливо неравенство*

$$\left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leqslant K \int_\Omega \alpha_x^2 v^2\, dx, \quad \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}. \tag{C.14}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством Соболева для функций из $H_0^1(\Omega)$.

Следствие C.10. *При тех же предположениях, что и в лемме* C.8, *имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \alpha^2 v^2\, dx \leqslant K \int_\Omega \alpha_x^2 v^2\, dx\, [\operatorname{mes}\{x \in \Omega \mid \alpha v \neq 0\}]^{2/N}. \tag{C.15}$$

Эта оценка следует из (C.14) и неравенства Гёльдера.

Замечание C.11. *Если $x \in \partial\Omega$ и v — субрешение в $H^1(\Omega(x, R))$, обращающееся в нуль на $\partial\Omega \cap B_R(x)$, то для $0 < \rho < R$ выполнены неравенства*

$$\int_{\Omega(x,\rho)} v_x^2\, dx \leqslant \frac{K}{(R-\rho)^2} \int_{\Omega(x,R)} v^2\, dx, \tag{C.16}$$

$$\int_{\Omega(x,\rho)} v^2\, dx \leqslant \frac{K}{(R-\rho)^2} \int_{\Omega(x,R)} v^2\, dx\, [\operatorname{mes}\{x \in \Omega(x, R) \mid v > 0\}]^{2/N}. \tag{C.17}$$

Для доказательства этих соотношений нужно в лемме C.8 и в следствиях C.9 и C.10 выбрать $\alpha \in C^1(\Omega)$ так, чтобы $\alpha = 1$ в $B_\rho(x)$, $\alpha = 0$ вне $B_{2\rho}(x)$ и $|\alpha_x| \leqslant 2/\rho$.

Доказательство теоремы C.4. Поскольку u — локальное L-субрешение, то функция

$$\max(u, k) - k = u - \min(u, k) \tag{C.18}$$

также есть локальное L-субрешение для любой константы k (см. теорему 6.6), а при $k \geqslant 0$ — субрешение в $H^1(\Omega(x, 2\rho))$, обращающееся в нуль на $\partial\Omega \cap B_{2\rho}(x)$.

Пусть $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ таково, что $\alpha = 1$ в $\Omega(x, \rho)$, $\alpha = 0$ вне $B_R(x)$, где $\rho < R$, и $|\alpha_x| \leqslant 2/(R-\rho)$. Согласно следствию C.10,

$$\int\limits_{A(k,\,\rho)} (u-k)^2\,dx \leqslant \frac{K}{(R-\rho)^2} \int\limits_{A(k,\,R)} (u-k)^2\,dx\,[\operatorname{mes} A(x, R)]^{2/N}, \tag{C.19}$$

где $A(k, \rho) = \{y \mid u(y) \geqslant k\} \cap \Omega(x, \rho)$. Если $h > k$, то

$$(h-k)^2 \operatorname{mes} A(h, \rho) \leqslant \int\limits_{A(h,\,\rho)} (u-k)^2\,dx \leqslant \int\limits_{A(k,\,R)} (u-k)^2\,dx. \tag{C.20}$$

Положим

$$a(h, \rho) = \operatorname{mes} A(h, \rho), \qquad u(h, \rho) = \int\limits_{A(h,\,\rho)} (u-h)^2\,dx. \tag{C.21}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} u(h, \rho) &\leqslant [K/(R-\rho)^2]\,u(k, R)\,[a(k, R)]^{2/N},\\ a(h, \rho) &\leqslant [1/(h-k)^2]\,u(k, R). \end{aligned} \tag{C.22}$$

Для любых положительных чисел ξ и η отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} &|u(h, \rho)|^\xi\,|a(h, \rho)|^\eta \leqslant \\ &\quad\leqslant \{K^\xi/[(R-\rho)^{2\xi}(h-k)^{2\eta}]\}\,|u(k, R)|^{\xi+\eta}\,|a(k, R)|^{2\xi/N}. \end{aligned} \tag{C.23}$$

Пусть ξ и η таковы, что $\xi + \eta = \theta\xi$, $2\xi/N = \theta\eta$, где θ есть положительный корень уравнения $\theta^2 - \theta - (2/N) = 0$, т. е. $\theta = (1/2) + \sqrt{(1/4) + (2/N)} > 1$. Зафиксируем теперь $\eta = 1$, $\xi = N\theta/2$ и положим $\varphi(h, \rho) = |u(h, \rho)|^\xi\,|a(h, \rho)|^\eta$. Тогда (C.23) может быть переписано так:

$$\varphi(h, \rho) \leqslant \frac{K^\xi}{(R-\rho)^{2\xi}(h-k)^{2\eta}}\,[\varphi(k, R)]^\theta, \tag{C.24}$$

где $h > k$, $\rho < R$ и $\theta > 1$. Следовательно, по лемме C.7 при $\sigma = 1/2$, $k_0 = 0$, $R_0 = 2\rho$ получим $\varphi(d, \rho) = 0$ и $d = K[\varphi(0, 2\rho)]^{(\theta-1)/2}/(2\rho)^{N\theta/2}$. Отсюда уже просто получается оценка (C.6). Этим доказана теорема C.4. Доказательство же теоремы C.6 (с учетом замечания C.11) проводится совершенно аналогично. ∎

Теорема C.12. *При тех же предположениях, что и в теореме* C.4 (*или в следствии* C.5), *справедливо неравенство*

$$\max_{\Omega(x,\,\rho)} u \leqslant k_0 + K\left(\frac{1}{\rho^N}\int\limits_{A(k_0,\,R)}(u-k_0)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\frac{\operatorname{mes} A(k_0,\,R)}{R^N}\right)^{(\theta-1)/2}, \tag{C.25}$$

где $\theta=(1/2)+\sqrt{(1/4)+(2/N)}>1$, $\rho<R$, $A(k,\,R)=\{y\in\Omega(x,\,R)\mid u(y)\geqslant k\}$ *и* k_0 — *любое действительное число, если* $x\in\Omega$ (*или любое неотрицательное число, если* $x\in\partial\Omega$).

Доказательство здесь точно такое же, как и в теореме C.4, но только лемму C.7 нужно использовать с тем k_0, которое указано в формулировке теоремы.

Рассмотрим теперь решение эллиптического уравнения

$$Lu=\sum_{i=1}^{N}(f_i)_{x_i},\quad \text{где } f_i\in L^s(\Omega),\ s\geqslant 2. \tag{C.26}$$

Теорема C.13. *Пусть* u — *локальное решение* (C.26). *Тогда существует такая константа* $K=K(\nu,\,M,\,N)$, *что если* $B_R(x)=\Omega(x,\,R)\subset\Omega$ *и* $s>N$, *то*

$$\max_{\Omega(x,\,R/2)}|u|\leqslant K\left[\left\{\frac{1}{R^N}\int\limits_{\Omega(x,\,R)}u^2\,dx\right\}^{1/2}+\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|_{L^s(\Omega(x,\,R))}R^{1-(N/s)}\right]. \tag{C.27}$$

Теорема C.14. *Пусть* $x\in\partial\Omega$ *и* u — *решение* (C.26), *равное нулю на* $\partial\Omega\cap B_R(x)$. *Тогда выполняется неравенство* (C.27).

Доказательство теорем C.13 и C.14. Пусть v — решение уравнения (C.26) в $H_0^1(\Omega(x,\,R))$. Положим $u=v+w$, где w — решение уравнения $Lu=0$ в $H^1(\Omega(x,\,R))$ (в случае теоремы C.14 нужно потребовать, чтобы оно обращалось в нуль на $\partial\Omega\cap B_R(x)$).

По теореме C.4, следствию C.5 и теореме C.6 получаем

$$\max_{\Omega(x,\,R/2)}|w|\leqslant K\left\{\frac{1}{R^N}\int\limits_{\Omega(x,\,R)}w^2\,dx\right\}^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant K\left[\left\{\frac{1}{R^N}\int\limits_{\Omega(x,\,R)}u^2\,dx\right\}^{1/2}+\left\{\frac{1}{R^N}\int\limits_{\Omega(x,\,R)}v^2\,dx\right\}^{1/2}\right].$$

Но, согласно теореме B.2,

$$\left(\int\limits_{\Omega(x,\,R)}v^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant\max_{\Omega(x,\,R)}|v|\,[\operatorname{mes}\Omega(x,\,R)]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant K\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|_{L^s(\Omega(x,\,R))}R^{1-(N/s)}[\operatorname{mes}\Omega(x,\,R)]^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\max_{\Omega(x,\,R/2)}|u|\leqslant\max_{\Omega(x,\,R/2)}|w|+\max_{\Omega(x,\,R/2)}|v|\leqslant$$
$$\leqslant K\left[\left(\frac{1}{R^N}\int\limits_{\Omega(x,\,R)}u^2\,dx\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|_{L^s(\Omega(x,\,R))}R^{1-(N/s)}\right].$$

Теоремы C.13 и C.14 доказаны. ∎

ПРИЛОЖЕНИЕ D. НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ГЁЛЬДЕРУ

В этом разделе мы предполагаем, что $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — открытое множество класса S (см. определение C.1). Докажем сначала две леммы.

Лемма D.1. *Пусть* $u\in H^1(\Omega(x,\ R))$ *и* $A(k,\ R)=\{y\in\Omega(x,\ R)\mid u(y)\geqslant k\}$. *Тогда если существуют такие константы* k_0 *и* θ, $0\leqslant\theta<1$, *что* $\operatorname{mes}A(k_0,\ R)<\theta\operatorname{mes}\Omega(x,\ R)$, *то для* $h>k>k_0$ *выполняется соотношение*

$$(h-k)[\operatorname{mes}A(h,\ R)]^{(N-1)/N}\leqslant K\int\limits_{A(k,\,R)\setminus A(h,\,R)}|u_x(t)|\,dt,\tag{D.1}$$

где $K=K(\theta,\ N)$. *Кроме того, по неравенству Коши из* (D.1) *следует неравенство*

$$(h-k)^2[\operatorname{mes}A(h,\ R)]^{(2N-2)/N}\leqslant$$
$$\leqslant K^2\int\limits_{A(k,\,R)}|u_x(t)|^2\,dt\operatorname{mes}\{A(k,\ R)\setminus A(h,\ R)\}.\tag{D.2}$$

Доказательство. Если $h>k>k_0$, то $v=\min\{u,\ h\}-\min\{u,\ k\}\in\in H^1(B_R(x))$ и $\operatorname{mes}\{x\in B_R(x)\mid v(x)=0\}=\operatorname{mes}\{B_R(x)\setminus A(k,\ R)\}>>(1-\theta)\operatorname{mes}B_R(x)$. Тогда по лемме A.13

$$\operatorname{mes}A(h,\ R)\leqslant\left[\frac{K}{h-k}\int\limits_{A(k,\,R)\setminus A(h,\,R)}|u_x(t)|\,dt\right]^{N/(N-1)},$$

что, очевидно, равносильно (D.1). ∎

Лемма D.2. *Пусть* φ — *неотрицательная и невозрастающая функция на* $[k_0,\ M]$, *такая что*

$$(h-k)^\alpha|\varphi(h)|^\beta\leqslant C[M-k]^\alpha[\varphi(k)-\varphi(h)]\tag{D.3}$$

при $k<h<M$, *где* α, β *и* C — *некоторые положительные константы. Тогда*

$$\lim_{h\to M}\varphi(h)=0.\tag{D.4}$$

Кроме того, если $k_n=M-(M-k_0)/2^n$, *то*

$$\varphi(k_n)\leqslant 2^\alpha C(\varphi(k_0)/n)^{1/\beta}.\tag{D.5}$$

Доказательство. Так как $k_n - k_{n-1} = (M - k_0)/2^n$ и $M - k_{n-1} = (M - k_0)/2^{n-1}$, то, согласно (D.3),

$$|\varphi(k_n)|^\beta \leqslant C2^\alpha [\varphi(k_{n-1}) - \varphi(k_n)].$$

Складывая эти неравенства при $n = 1, \ldots, \nu$ и учитывая, что $\varphi(k_n) \geqslant \varphi(k_\nu)$, получим

$$\nu |\varphi(k_\nu)|^\beta \leqslant 2^\alpha C [\varphi(k_0) - \varphi(k_1)].$$

Следовательно, $\varphi(k_\nu) \leqslant (2^\alpha C \varphi(k_0)/\nu)^{1/\beta}$ и (D.4) доказано. ∎

Пусть u — решение уравнения $Lu = 0$. Определим величины

$$m(r) = \inf_{\Omega(x,\, r)} u, \qquad M(r) = \sup_{\Omega(x,\, r)} u.$$

Теорема D.3. *Пусть u — локальное решение уравнения $Lu = 0$ и точка $x_0 \in \Omega$ такова, что*

$$\operatorname{mes} A(k_0, R) \leqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{mes} \Omega(x_0, R), \tag{D.6}$$

где $k_0 = \frac{1}{2}(M(2R) + m(2R))$. Тогда

$$\lim_{h \to M(2R)} \operatorname{mes} A(h, R) = 0. \tag{D.7}$$

Теорема D.4. *Пусть $x_0 \in \partial\Omega$, Ω класса S и u — решение уравнения $Lu = 0$, обращающееся в нуль на $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$. Тогда справедливо заключение теоремы* D.3.

Доказательство теорем D.3 и D.4. Пусть $\alpha \in C_0^1(\Omega(x_0, 2R))$ и $\alpha = 1$ в $\Omega(x_0, R)$. В силу леммы C.8 и замечания C.11, при $v = \max(u, k) - k$ имеем

$$\int\limits_{A(k,\, R)} u_x^2\, dx \leqslant \frac{C}{R^2} \int\limits_{A(k,\, 2R)} (u-k)^2\, dx.$$

Здесь k — любое число, если $x_0 \in \Omega$, и $k \geqslant 0$, если $x_0 \in \partial\Omega$. Из леммы D.1 вытекает, что при $h > k$

$$(h-k)^2 [\operatorname{mes} A(h, R)]^{(2N-r)/N} \leqslant \\ \leqslant C [M(2R) - k]^2 R^{N-2} [\operatorname{mes} A(k, R) - \operatorname{mes} A(h, R)],$$

и тем самым (D.7) следует из леммы D.2. ∎

Теорема D.5. *При тех же предположениях, что и в теоремах* D.3 *и* D.4, *существуют такие числа η, $0 < \eta < 1$, и $\rho_0 > 0$, что при $\rho < \rho_0$*

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho), \tag{D.8}$$

где $\omega(\rho) = M(\rho) - m(\rho)$ — колебание решения u в $\Omega(x_0, \rho)$.

Доказательство. Мы можем предполагать, что выполнено (D.6). Действительно, так как $\operatorname{mes}\{x \in \Omega(x_0, R) \mid u(x) \geqslant k\} + \operatorname{mes}\{x \in$

$\Omega(x_0, R) \mid -u(x) \geqslant k\} \leqslant \operatorname{mes}\Omega(x_0, R)$, то по крайней мере для одного из двух решений u или $-u$ соотношение (D.6) справедливо. Или же, по-другому, если $x_0 \in \partial\Omega$, то для одного из этих двух решений $k_0 = (1/2)[M(2R) + m(2R)] \geqslant 0$, и поэтому (D.6) выполняется. Если $k_0 \geqslant 0$ для u, то функция $v = \max(u, k) - k$ равна нулю вне $\partial\Omega \cap B_\rho(x_0)$ и, следовательно, продолжается нулем в $B_R(x_0) \setminus \Omega(x_0, R)$, так что справедливо замечание C.11. По теореме C.12, где вместо k_0 берем

$$k_\nu = M(2R) - [M(2R) - m(2R)]/2^{\nu+1}$$

и ν столь большое, что $k_\nu > k_0$, получим

$$M(R/2) \leqslant k_\nu + K[M(2R) - k_\nu][\operatorname{mes} A(k_\nu, R)/R^N]^{(\theta-1)/2}$$

с $\theta > 1$. Согласно теоремам D.3 и D.4, ν можно выбрать так, чтобы $K[\operatorname{mes} A(k_\nu, R)/R^N]^{(\theta-1)/2} < 1/2$ и тем самым

$$M(R/2) \leqslant M(2R) - [M(2R) - m(2R)]/2^{\nu+2}.$$

Кроме того, так как $m(R/2) \geqslant m(2R)$, то $\omega(R/2) \leqslant \omega(2R)[1 - (1/2^{\nu+2})]$ и теорема D.5 доказана. ∎

Известно, что из этой теоремы следует непрерывность по Гёльдеру решения уравнения (упр. 18). Тогда, в частности, локальное решение уравнения $Lu = 0$ удовлетворяет условию Гёльдера на каждом компакте C в Ω, или, другими словами, существуют такие константы K и λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, зависящие только от ν, M, N и компакта, что

$$\underset{\Omega(x,\rho)}{\operatorname{osc}} u(y) \leqslant K\left(\left[\int_{\Omega(x,R)} u^2\,dx\right]\Big/R^N\right)^{1/2}(\rho/R)^\lambda, \quad 0 < \rho < R < \operatorname{dist}(C, \partial\Omega). \tag{D.9}$$

Рассмотрим сейчас решение уравнения $Lu = \sum_{i=1}^N (f_i)_{x_i}$, которое обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Пусть $v \in H_0^1(\Omega(x, 8\rho))$ — решение уравнения $Lv = \sum_{i=1}^N (f_i)_{x_i}$. Положим $u = v + w$, где w — решение уравнения $Lw = 0$, равное нулю на $\partial\Omega \cap B_{8\rho}(x)$. Поскольку $\underset{\Omega(x,\rho)}{\operatorname{osc}} u \leqslant 2 \underset{\Omega(x,\rho)}{\max} |v| + \operatorname{osc} w$, то по теоремам D.5 и B.2 (если $f_i \in L^s(\Omega)$, $s > N$) существуют константы $K > 0$, $\rho_0 > 0$, $0 < \eta < 1$, такие что

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho) + K\rho^{1-(N/s)}, \quad \rho < \rho_0. \tag{D.10}$$

Отсюда следует, что u непрерывна по Гёльдеру на $\bar{\Omega}$, и тем самым доказана теорема C.2.

Замечание D.6. *При тех же предположениях, что и в теореме* C.2, *существуют такие константы* $K>0$, $\rho_0>0$ *и* $0\leqslant\lambda<1$, *что*

$$\int\limits_{\Omega(x,\ \rho)} u_x^2\,dx\leqslant K\rho^{n-2+2\lambda},\quad \rho<\rho_0. \tag{D.11}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $u-u(x_0)$ — решение в $\Omega(x_0,\ \rho_0)$ того же уравнения, что и u, которое равно нулю на $\partial\Omega\cap B_{\rho_0}(x_0)$, и что $|u(x)-u(x_0)|\leqslant K\rho^\lambda$ при $x\in\Omega(x_0,\ 2\rho)$ вследствие теоремы C.2.

Используя теперь неравенство, аналогичное (C.16), для неоднородного уравнения и решения $u(x)-u(x_0)$, мы получим (D.11). ∎

Неравенство (D.11), согласно теореме Морри, влечет за собой непрерывность по Гёльдеру решения u. Следует, однако, заметить, что если для двух переменных можно доказать (D.11) и вывести из него непрерывность по Гёльдеру, то для большего числа переменных мы должны сначала установить такую непрерывность, а затем вывести (D.11).

Комментарии и библиографические указания

Теорема 2.1 впервые была доказана Стампаккья [3]. Другое доказательство дано в работе Лионса и Стампаккья [1]. Специальный случай симметричных форм был изучен раньше. Упомянем также работы Литтмана и др. [1] и Фикеры [1].

Первый пример вариационного неравенства был приведен в § 3. Там препятствием служила функция из L^2. В основном методе решения увязываются воедино вариационный подход к решению краевых задач с классической теорией потенциала, ибо при применении этого метода мы не выходим за рамки соболевских пространств $H^{1,\,s}(\Omega)$. Более того, обобщенные производные функций, обходящих препятствия, явно вычисляются (см. теорему A.1 и следствия A.5 и A.6).

Этот факт был хорошо известен для функций, которые абсолютно непрерывны в смысле Тонелли и/или Морри, но для функций из пространств $H^{1,\,s}(\Omega)$, определяемых как пополнение гладких функций в соответствующей топологии, необходимы аккуратные рассуждения. Многие теоремы об эллиптических дифференциальных уравнениях второго порядка в дивергентной форме доказываются с помощью этого результата, например слабый принцип максимума из § 5, а также результаты, связанные со знаменитой теоремой Де Джорджи о непрерывности по Гёльдеру решений этих уравнений.

Утверждения § 6, относящиеся к задаче с препятствием, используют результаты уже упомянутой работы Лионса и Стампаккья [1] и работы Леви и Стампаккья [1].

В этой главе мы не затрагивали вопросов гладкости решений (систематическое их изучение отложено до гл. IV), а ограничились лишь рассмотрением в этой связи одномерной задачи с препятствием.

Некоторые факты, приведенные в приложениях к настоящей главе, относятся к содержанию всей книги. Кроме того, там даны полные доказательства результатов о неравенствах соболевского типа, об оценках в L^∞ и непрерывности по Гёльдеру решений уравнений второго порядка с измеримыми ограниченными коэффициентами. Изложение последнего материала основано на работе Стампаккья [2]. Доказательство леммы A.4 принадлежит М. Крэндаллу, а леммы A.13 — Э. Фейбсу.

Упражнения

1. Пусть a — билинейная коэрцитивная форма на действительном гильбертовом пространстве H, т. е. $|a(u, v)| \leqslant C\|u\|\|v\|$ и $a(v, v) \geqslant \alpha\|v\|^2$ для всех $u, v \in H$ (см. определение 1.1), и пусть $0 < \rho < 2\alpha/C^2$. Докажите существование такого числа θ, $0 < \theta < 1$, что

$$|(u, v) - \rho a(u, v)| < \theta\|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in H.$$

2. Докажите теорему 2.1, используя предыдущее упражнение (Лионс и Стампаккья [1]).

3. Пусть $F\colon H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая, собственная (т. е. не равная тождественно $+\infty$) и полунепрерывная снизу функция. Тогда существует единственный элемент $u \in H$, такой что

$$a(u, v-u) + F(v) - F(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in H.$$

Выведите отсюда теорему 2.1, полагая

$$F(v) = \begin{cases} -(f, v), & v \in K, \\ +\infty, & v \notin K, \end{cases}$$

где $f \in H'$ и K — замкнутое выпуклое подмножество H.

4. Пусть E — подмножество шара $B_r \subset \mathbb{R}^N$. Точки вида $\xi = x + (y - x)/\|y - x\|$, очевидно, принадлежат сфере Σ единичного радиуса с центром в x. Углом, под которым видно множество E из точки $x \in B_r$, называется $(N-1)$-мера множества $\{\xi \in \Sigma \mid y \in E\}$; он обозначается $\operatorname{ang}\{x, E\}$.

Пусть существует такое $m > 0$, что $\operatorname{ang}\{x, E\} \geqslant m$ при всех $x \in B_r$. Покажите, что если функция $u \in H^{1,1}(B_r)$ равна нулю на E, то для каждого $\sigma > 0$

$$\operatorname{mes}\{x \in B_r \mid |u(x)| > \sigma\} \leqslant \left[(C/\sigma)\int_{B_r} |u_x(t)|\,dt\right]^{N/(N-1)},$$

где C зависит только от E. [*Указание.* Приспособьте доказательство леммы A.7 к этому случаю. Рассмотрите билипшицево отображение $T\colon \Omega \to B_r$, т. е. такое, что $0 < \alpha \leqslant \|T_x - T_y\|/\|x - y\| < \beta < +\infty$ при всех $x, y \in \Omega$; оно является отображением «на».]

Покажите, что если $u \in H^{1,1}(\Omega)$ равна нулю на $T(E)$ (E удовлетворяет условиям выше), то справедливо неравенство $\int_\Omega u^2\,dx \leqslant C\int_\Omega u_x^2\,dx$ с некоторой константой $C > 0$.

5. Пусть $E \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$, где Ω ограничено и открыто, и функция $u \in H^{1,1}(\Omega)$ обращается в нуль на E. Каким должно быть это множество E, чтобы для некоторой константы β выполнялось неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega \mid |u(x)| > \sigma\} \leqslant \left[(\beta/\sigma)\int_\Omega |u_x(t)|\,dt\right]^{N/(N-1)}$$

(см. лемму A.13)? Необходимо ли для этого выполнение условий леммы A.13?

6. Используйте упр. 4 для изучения вопроса существования решения (в рамках § 4) смешанной задачи:

$$-\Delta u = f, \qquad u = 0 \text{ на } \partial_1\Omega, \qquad du/dn = 0 \text{ на } \partial_2\Omega,$$

где $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ и $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \varnothing$.

7. Докажите лемму A.12.

8. Найдите функцию

$$u \in K\colon \quad \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \langle f, v-u\rangle \qquad \forall v \in K,$$

где $K=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1 \leqslant v \leqslant \psi_2$ в $\Omega\}$, ψ_1, $\psi_2 \in H^1(\Omega)$ и $\psi_1 \leqslant 0 \leqslant \psi_2$ на $\partial\Omega$.

9. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^N$, $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $K=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi$ на $\Omega\}$ и

$$u \in K: \quad \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K. \tag{$*$}$$

Покажите, что если $f \in L^2(\Omega)$ и $u \in H^2(\Omega)$, то $(*)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$-\Delta u - f \geqslant 0, \; u-\psi \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -(\Delta u + f)(u-\psi)=0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega. \tag{$**$}$$

Такой вид задачи называют «дополнительной формой» по аналогии с дополнительной задачей I.5.4.

10. Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ и $g \in L^2(\partial\Omega)$. Изучите для $\lambda \in \mathbb{R}$ вопрос существования и единственности функции $u \in K=\{v \in H^1(\Omega) \mid v \geqslant 0$ на $\partial\Omega\}$, такой что

$$\int_\Omega \left[u_{x_i}(v-u)_{x_i} + \lambda(v-u)\right] dx \geqslant \langle f, v-u\rangle + \int_{\partial\Omega} g(v-u)\,dx \quad \forall v \in K.$$

Выпишите «дополнительную форму» задачи.

11. Пусть снова Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и $f \in H^{-1}(\Omega)$. Положим

$$V=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta v \in H_0^1(\Omega)\} \subset H^3(\Omega),$$

$$K=\{v \in V \mid -\Delta v \geqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega\},$$

$$a(u, v)=\int_\Omega (\Delta u_{x_i}\,\Delta v_{x_i} + u_{x_i}v_{x_i})\,dx.$$

Докажите существование и единственность функции

$$u \in K: \quad a(u, v-u) \geqslant \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K.$$

Запишите задачу в «дополнительной форме». Покажите, что существует константа $c>0$, такая что $\|u_1-u_2\|_{H^3(\Omega)} \leqslant c\|f_1-f_2\|_{H^{-1}(\Omega)}$, где u_i — решение вариационного неравенства, отвечающее f_i.

12. Покажите, что в задаче Неймана

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad \partial u/\partial\nu = g \text{ на } \partial\Omega,$$

где $f \in L^2(\Omega)$ и $g \in L^2(\partial\Omega)$, решение существует, если выполнено условие совместности $\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,d\sigma = 0$. Найдите соответствующее условие для случая, когда $f \in H^{-1}(\Omega)$ и $g \in L^2(\partial\Omega)$.

13. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, φ^1, $\varphi^2 \in H^1(\Omega)$ и $\varphi^1 \geqslant \varphi^2$ на $\partial\Omega$. Пусть, далее, K — замкнутое и выпуклое множество, образованное парами $v=(v^1, v^2) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$, такими что $v^1 \geqslant v^2$ в Ω и $v^1=\varphi^1$, $v^2=\varphi^2$ на $\partial\Omega$, и пусть, наконец, $(f_1, f_2) \in H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$. Рассмотрите билинейную форму

$$a(v, \zeta)=\int_\Omega \left(v^1_{x_i}\zeta^1_{x_i} + v^2_{x_i}\zeta^2_{x_i}\right) dx + \int_\Omega (\lambda v^1\zeta^1 + \mu v^2\zeta^2)\,dx,$$

где λ, $\mu \in \mathbb{R}$, и изучите вопрос существования функции

$$u \in K: \quad a(u, v-u) \geqslant \langle f_1, v^1-u^1\rangle + \langle f_2, v^2-u^2\rangle \quad \forall v \in K,$$

налагая, если это необходимо, ограничения на λ и μ.

14. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и Γ, Γ' — открытые непустые подмногообразия $\partial\Omega$, удовлетворяющие условиям: (i) $\Gamma \cap \Gamma' = \varnothing$,

(ii) $\bar\Gamma \cup \bar\Gamma' = \partial\Omega$, (iii) $\bar\Gamma \cap \bar\Gamma'$ — гладкое $(N-2)$-мерное многообразие. Пусть, далее, $f_1, f_2 \in H^{-1}(\Omega)$. Рассмотрите задачу: найти такие $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$, что

$$-\Delta u_i = f_i, \quad i=1, 2, \quad \text{в } \Omega,$$
$$u_1 - u_2 = 0, \quad (du_1/dn) + (du_2/dn) = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$
$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma',$$

где n — нормаль к Γ. Найдите ослабленную переформулировку этой задачи и покажите, что у нее существует решение. [*Указание.* Сформулируйте задачу для билинейной формы на гильбертовом пространстве $H = \{v = (v_1, v_2) \mid v_i \in H^1(\Omega),\ i=1, 2;\ v_1 - v_2 = 0 \text{ на } \Gamma,\ v_1 = v_2 = 0 \text{ на } \Gamma'\}$.]

15. Пусть $u \in H^{1,p}(B_r)$, где $1 < p < \infty$ и B_r — шар радиуса r в $\mathbb{R}^N$. Покажите, что существует такая константа γ, что $\int\limits_{B_r} |u-\gamma|^p\,dx \leqslant C \int\limits_{B_r} u_x^p\,dx$ для некоторого $C > 0$. [*Указание.* Для любой константы γ справедливо равенство $u - \gamma = [\max(u, \gamma) - \gamma] + [\min(u, \gamma) - \gamma]$. Выберем теперь γ так, чтобы меры тех множеств, где соответственно обращаются в нуль функции в первой и второй квадратных скобках, были $\geqslant (1/2)\,\mathrm{mes}\,B_r$. Далее нужно воспользоваться леммами A.15 и A.14.]

16. Докажите следствие A.6. [*Указание.* Предполагая, что $|u(x)| \leqslant M$, выберите такую последовательность $f_n \in C(-M, M)$, что $f_n(t) \to \theta'(t)$ при $|t| \leqslant M$, $t \neq a, \ldots, a_M$, и покажите сначала, что $f_n(u(x))\,u_{x_i}(x) \to \theta'(u(x))\,u_{x_i}(x)$ п. в. в Ω. Затем запишите (в предположении, что $\theta(0) = 0$) равенство

$$-\int\limits_\Omega \theta(u(x))\,\zeta_{x_i}(x)\,dx = -\int\limits_\Omega \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{u(x)} f_n(t)\,dt\,\zeta_{x_i}(x)\,dx.$$

Указанную здесь последовательность $\{f_n\}$ всегда можно выбрать, полагая, например, $f_n(t) = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\int\limits_{|t-\tau|<1/n} \theta'(\tau)\,d\tau$.]

17. Пусть $u_n \in L^s(\Omega)$ и $0 \leqslant w_n \in L^s(\Omega)$ таковы, что $u_n \to u$ п. в. в Ω, $w_n \to w$ п. в. в Ω и в $L^s(\Omega)$ и $|u_n| \leqslant w_n$ п. в. в Ω. Тогда $u_n \to u$ в $L^s(\Omega)$. Используйте этот факт для того, чтобы показать, что если $u_n \in H^{1,s}(\Omega)$ и $u_n \to u$ в $H^{1,s}(\Omega)$, то $|u_n| \to |u|$ в $H^{1,s}(\Omega)$ и, как следствие, $\max(u_n, 0) \to \max(u, 0)$ в $H^{1,s}(\Omega)$. Можно ли так рассуждать в упр. 14 или лемме A.4?

18. Пусть ω — непрерывная функция, определенная на $[0, R]$ и такая, что $0 \leqslant \omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho) + C(\rho/R)^\alpha$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$, где $C \geqslant 0$, $0 \leqslant \eta < 1$ и $\alpha > 0$. Тогда

$$\omega(\rho) \leqslant 2\max(\omega(R), CK)(\rho/R)^\lambda, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant R/4,$$

где K — абсолютная константа и $\lambda = \min(|\log\eta/\log 4|, \alpha)$. [*Указание.* По индукции найдется константа K, такая что $\omega(4^{-n}R) \leqslant \eta^n\omega(R) + CK\rho^\alpha$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, если $4^n \leqslant R/\rho \leqslant 4^{n+1}$; тогда $\eta^n \leqslant \eta^q \leqslant \eta^{n+1}$, где $q = (\log R/\rho)/\log 4$ и $\omega(\rho) \leqslant \omega(4^{-n}R)$.]

Глава **III**

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Нам пришлось уже встретиться в гл. I с монотонными операторами в конечномерном пространстве. Там монотонность была использована для доказательства единственности решения *вариационного неравенства*. Данная глава посвящена изучению вариационных неравенств в более общих пространствах. Здесь свойство монотонности найдет важное применение в вопросах существования решения. В предыдущей главе было показано, что вариационное неравенство, порожденное билинейной формой, имеет решение, если эта форма коэрцитивна. Для билинейной формы из коэрцитивности вытекает строгая монотонность, но, разумеется, не наоборот. Так и в общем случае, если выпуклое множество K неограничено, то для существования решения в вариационном неравенстве нужно требовать еще и коэрцитивности соответствующего оператора (см., например, следствие 1.8).

Пусть X — рефлексивное банахово пространство, X' — его двойственное относительно билинейной формы $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$: $X'\times X\to\mathbb{R}$ (иногда говорят, что $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ задает спаривание X' и X) и $K\subset X$ — замкнутое выпуклое множество.

Определение 1.1. Отображение A: $K\to X'$ называется *монотонным*, если

$$\langle Au-Av,\ u-v\rangle\geqslant 0 \quad \forall u,\ v\in K. \tag{1.1}$$

Монотонное отображение A называется *строго монотонным*, если

$$\text{из } \langle Au-Av,\ u-v\rangle=0 \text{ следует } u=v. \tag{1.2}$$

Определение 1.2. Отображение A: $K\to X'$ называется *непрерывным на конечномерных подпространствах*, если для каждого конечномерного подпространства $M\subset X$ отображение A: $K\cap M\to X'$ слабо непрерывно.

Определение 1.3. Отображение A: $K\to X'$ называется *коэрцитивным* на K, если существует такой элемент $\varphi\in K$, что

$$\langle Au-A\varphi,\ u-\varphi\rangle/\|u-\varphi\|\to+\infty \text{ при } \|u\|\to\infty,\ u\in K. \tag{1.3}$$

Теорема 1.4. *Пусть K — непустое замкнутое выпуклое ограниченное подмножество X и A: $K \to X'$ — монотонное и непрерывное на конечномерных подпространствах отображение. Тогда существует элемент*

$$u \in K: \quad \langle Au, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.4}$$

Отметим, что если A строго монотонно, то решение u этого вариационного неравенства единственно.

Докажем сначала лемму, принадлежащую Минти [1].

Лемма 1.5. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество X и A: $K \to X'$ — монотонное и непрерывное на конечномерных подпространствах отображение. Тогда для того чтобы элемент $u \in K$ удовлетворял неравенству*

$$\langle Au, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \tag{1.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle Av, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.6}$$

Доказательство. Покажем сначала, что (1.5) влечет за собой (1.6). В силу монотонности A,

$$0 \leqslant \langle Av - Au, v-u \rangle = \langle Av, v-u \rangle - \langle Au, v-u \rangle \quad \forall u, v \in K$$

и, следовательно, $\langle Av, v-u \rangle \geqslant \langle Au, v-u \rangle \geqslant 0$ при всех $v \in K$.

Теперь докажем обратное. Пусть $w \in K$; тогда $v = u + t(w-u) \in K$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ вследствие выпуклости K. Поэтому, согласно (1.6), при $t > 0$ имеем $\langle A(u+t(w-u)), t(w-u) \rangle \geqslant 0$, или

$$\langle A(u+t(w-u)), w-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall w \in K.$$

Поскольку A слабо непрерывно на пересечении K с двумерной плоскостью, натянутой на u и w, то при $t \to 0$ получаем, что $\langle Au, w-u \rangle \geqslant 0$ при всех $w \in K$. ∎

Доказательство теоремы 1.4. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in K$. Пусть $M \subset X$ — конечномерное подпространство, j: $M \to X$ — оператор вложения и j': $X' \to M'$ — оператор, сопряженный к j. Билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, задающая двойственность между M' и M, определяется естественным образом:

$$\langle f, jx \rangle = \langle j'f, x \rangle_M, \quad x \in M, \quad f \in X'.$$

Обозначим $K_M = K \cap M \equiv K \cap jM$ и рассмотрим отображение $j'Aj$: $K_M \to M'$. Так как K_M — компактное выпуклое подмножество M и $j'Aj$ непрерывно, то существует такой элемент $u_M \in K_M$, что $\langle j'Aju_M, v - u_M \rangle_M \geqslant 0$ при всех $v \in K_M$ (теорема 3.1 из гл. I), или ($ju_M = u_M$, $jv = v$)

$$\langle Au_M, v-u_M \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K_M.$$

По лемме Минти (лемма 1.5)

$$\langle Av,\ v-u_M\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K_M. \tag{1.7}$$

Положим $S(v)=\{u\in K \mid \langle Av,\ v-u\rangle \geqslant 0\}$. Ясно, что для каждого $v\in K$ множество $S(v)$ слабо компактно как слабо замкнутое подмножество слабо компактного множества K (K ограничено по условию[1]). Следовательно, множество $\bigcap\limits_{v\in K} S(v)$ слабо компактно. Покажем, что оно непусто. Для этого достаточно проверить, что

$$S(v_1)\cap S(v_2)\cap\ldots\cap S(v_m)\neq\varnothing \tag{1.8}$$

для любого набора $\{v_1, \ldots, v_m\}\subset K$[2].

Обозначим через M линейную оболочку векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, и пусть, как и раньше, $K_M=K\cap M$. По тем же соображениям, что и выше (см. вывод (1.7)), найдется элемент $u_M\in K_M$, такой что $\langle Av,\ v-u_M\rangle\geqslant 0$ при всех $v\in K_M$. Тогда, в частности, $\langle Av_i,\ v_i-u_M\rangle\geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$, и, следовательно, $u_M\in S(v_i)$, $i=1, \ldots, m$. Таким образом, (1.8) справедливо для любого конечного набора, и тем самым существует элемент $u\in\bigcap\limits_{v\in K} S(v)$. Ясно, что $\langle Av,\ v-u\rangle\geqslant 0$ при всех $v\in K$, и тогда снова по лемме 1.5 $\langle Au,\ v-u\rangle\geqslant 0$ при всех $v\in K$. ∎

Решение вариационного неравенства (1.4) не обязательно единственно. Но легко проверить (используя лемму 1.5), что совокупность всех решений (1.4) — замкнутое выпуклое подмножество K.

Следствие 1.6. *Пусть H — гильбертово пространство, $K\subset H$ — непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество и $F\colon K\to K$ — нерастягивающее отображение. Тогда совокупность всех неподвижных точек F есть непустое замкнутое выпуклое подмножество в K.*

Определение нерастягивающего отображения дано в гл. I (опр. 1.1).

Доказательство. Следствие доказывается очень просто. Действительно, положим $H'=H$ и в качестве билинейной формы, приводящей H' и H в двойственность, возьмем скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ на H. Легко проверить, что коль скоро F — нерастягивающее отображение, то $I-F$ монотонно и, значит, можно применить теорему 1.4. Тогда ясно, что любое решение вариационного неравенства для $I-F$ является неподвижной точкой для F:

$$(u-F(u),\ v-u)\geqslant 0\ \forall v\in K \Rightarrow (u-F(u),\ F(u)-u)\geqslant 0 \Rightarrow u=F(u). \ ∎$$

Сформулируем аналоги теоремы 4.2 и следствия 4.3 из гл. I.

[1] Напомним, что выпуклое замкнутое множество слабо замкнуто, а ограниченные слабо замкнутые множества в рефлексивном пространстве слабо компактны. — *Прим. перев.*

[2] То есть что $\{S(v)\}_{v\in K}$ есть центрированная система. — *Прим. ред.*

Теорема 1.7. *Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество X и отображение A: $K \to X'$ монотонно и непрерывно на конечномерных подпространствах. Тогда для существования*

$$u \in K: \quad \langle Au, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $R>0$, что по крайней мере для одного элемента $u_R \in K_R$, для которого $\langle Au_R, v-u_R \rangle \geqslant 0$ при всех $v \in K_R$ (где $K_R = K \cap \{v \mid \|v\| \leqslant R\}$), выполняется неравенство $\|u_R\| < R$.

Следствие 1.8. *Пусть $K \subset X$ — непустое замкнутое выпуклое множество и отображение A: $K \to X'$ монотонно, коэрцитивно и непрерывно на конечномерных подпространствах. Тогда*

$$\exists u \in K: \quad \langle Au, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Доказательства теоремы 1.7 и следствия 1.8 вполне аналогичны доказательствам их конечномерных аналогов и поэтому не приводятся.

2. НЕКОЭРЦИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые случаи, когда требование коэрцитивности заменяется более слабыми предположениями. При этом ради простоты мы ограничиваемся линейными операторами в гильбертовом пространстве, а порожденные ими билинейные формы будем предполагать неотрицательными. В нижеследующих первых двух теоремах будет объяснен так называемый метод эллиптической регуляризации.

Затем мы рассматриваем полукоэрцитивную форму и доказываем для нее теорему существования при некоторых условиях на правую (неоднородную) часть вариационного неравенства.

Итак, пусть $X = H$ — гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на H, H' — двойственное к H относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, K — выпуклый замкнутый конус в H и $f \in H'$.

Пусть, далее, a — неотрицательная билинейная форма на H: $a(v, v) \geqslant 0$. Определим оператор A: $H \to H'$ условием $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$. Из теоремы 1.4 следует, что если K ограничено, то

$$\exists u_0 \in K: \quad \langle Au_0, v-u_0 \rangle \geqslant \langle f, v-u_0 \rangle \quad \forall v \in K,$$

или эквивалентно

$$\exists u_0 \in K: \quad a(u_0, v-u_0) \geqslant \langle f, v-u_0 \rangle \quad \forall v \in K.$$

Аналогичные утверждения верны, если K неограничено, но выполнены условия теоремы 1.7. Однако если K неограничено и условия теоремы 1.7 не выполняются, то решения может не быть.

В следующей теореме доказывается критерий существования решения. При его доказательстве используется процедура, называемая эллиптической регуляризацией.

Введем следующее обозначение:

$$\chi=\{u_0\in K \mid \langle Au_0,\ v-u_0\rangle \geqslant \langle f,\ v-u_0\rangle\quad \forall v\in K\}.$$

Мы уже знаем, что это множество выпукло и замкнуто; увы, оно может оказаться пустым.

Пусть β — коэрцитивная билинейная форма на H и $g\in H'$. Рассмотрим для каждого $\varepsilon>0$ форму $a(u,\ v)+\varepsilon\beta(u,\ v)$. Ясно, что это билинейная коэрцитивная форма на H, и, следовательно, по теореме 2.1 гл. II существует единственный элемент

$$u_\varepsilon\in K:\quad a(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)+\varepsilon\beta(u_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon)\geqslant\langle f+\varepsilon g,\ v-u_\varepsilon\rangle\quad \forall v\in K.$$

Теорема 2.1. *Множество χ непусто тогда и только тогда, когда существует такая константа L, не зависящая от ε, что $\|u_\varepsilon\|\leqslant L$.*

Доказательство. Пусть $\chi\neq\varnothing$. Поскольку χ — замкнутое выпуклое подмножество $K\subset H$, то существует единственный элемент

$$u_0\in\chi:\quad \beta(u_0,\ v-u_0)\geqslant\langle g,\ v-u_0\rangle\quad \forall v\in\chi.$$

Кроме того, по определению χ

$$a(u_0,\ v-u_0)\geqslant\langle f,\ v-u_0\rangle\quad \forall v\in K.$$

Положим $v=u_\varepsilon$ в этом неравенстве, $v=u_0$ в вариационном неравенстве, определяющем u_ε, и сложим их. Тогда

$$a(u_0,\ u_\varepsilon-u_0)+a(u_\varepsilon,\ u_0-u_\varepsilon)+\varepsilon\beta(u_\varepsilon,\ u_0-u_\varepsilon)\geqslant\varepsilon\langle g,\ u_0-u_\varepsilon\rangle.$$

Но $a(u_0,\ u_\varepsilon-u_0)+a(u_\varepsilon,\ u_0-u_\varepsilon)=-a(u_\varepsilon-u_0,\ u_\varepsilon-u_0)\leqslant 0$ и, следовательно, $\beta(u_\varepsilon,\ u_0-u_\varepsilon)\geqslant\langle g,\ u_0-u_\varepsilon\rangle$. Так как форма β коэрцитивна, то

$$\beta_0\|u_\varepsilon\|^2\leqslant\beta(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\leqslant\beta(u_\varepsilon,\ u_0)+\langle g,\ u_\varepsilon-u_0\rangle\leqslant$$
$$\leqslant C_1\|u_\varepsilon\|\,\|u_0\|+C_2(\|u_\varepsilon\|+\|u_0\|)\leqslant C(1+\|u_\varepsilon\|),$$

где $C=C(\|u_0\|,\ g,\ \beta)$. Используя очевидное неравенство $C\|u_\varepsilon\|\leqslant(\beta_0/2)\|u_\varepsilon\|^2+[C^2/(2\beta_0)]$, получаем, что $\|u_\varepsilon\|\leqslant L=2+(C/\beta_0)$, где L не зависит от ε.

Пусть теперь $\|u_\varepsilon\|\leqslant L$ и L не зависит от ε. Тогда существует подпоследовательность $\{u_\eta\}$ последовательности $\{u_\varepsilon\}$, такая что $u_\eta\to w$ слабо в H. Очевидно, $w\in K$. Мы хотим показать, что $w\in\chi$. По лемме 1.5 $a(v,\ v-u_\eta)+\eta\beta(v,\ v-u_\eta)\geqslant\langle f,\ v-u_\eta\rangle+\eta\langle g,\ v-u_\eta\rangle$. Переходя здесь к пределу при $\eta\to 0$ и учитывая, что $u_\eta\to w$ слабо, получим

$$a(v,\ v-w)\geqslant\langle f,\ v-w\rangle\quad \forall v\in K.$$

Теперь снова по лемме 1.5 $a(w,\ v-w)\geqslant\langle f,\ v-w\rangle$ при всех $v\in K$ и, следовательно, $w\in\chi$. ∎

Следующее предложение служит важным дополнением к теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $\|u_\varepsilon\| \leqslant L$ *и* L *не зависит от* ε. *Тогда* u_ε *сильно в* H *сходится к элементу* u_0, *когда* $\varepsilon \to 0$, *причем*

$$u_0 \in \chi \quad \text{и} \quad \beta(u_0, v - u_0) \geqslant \langle g, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in \chi.$$

Доказательство. Поскольку $\|u_\varepsilon\| \leqslant L$ равномерно по ε, то по предыдущей теореме $\chi \neq \emptyset$. Но тогда существует единственное решение $u_0 \in \chi$ вариационного неравенства

$$\beta(u_0, v - u_0) \geqslant \langle g, v - u_0 \rangle \quad \forall v \in \chi.$$

Так как $\|u_\varepsilon\| \leqslant L$, то найдется подпоследовательность $\{u_\eta\}$ последовательности $\{u_\varepsilon\}$, которая слабо сходится в H к некоторому элементу $w \in H$.

В первой части доказательства теоремы 2.1 было показано, что $\beta(u_\eta, u_0 - u_\eta) \geqslant \langle g, u_0 - u_\eta \rangle$. Функция $\beta(v, v)$ слабо полунепрерывна снизу, откуда $\beta(w, w) \leqslant \liminf\limits_{\eta \to 0} \beta(u_\eta, u_\eta)$ и поэтому $\beta(w, u_0 - w) \geqslant \langle g, u_0 - w \rangle$.

Теперь докажем последовательно, что (i) $w = u_0$, (ii) $u_\varepsilon \to u_0$ слабо в H, (iii) $u_\varepsilon \to u_0$ сильно в H.

Поскольку $u_0 \in \chi$ и $\beta(u_0, v - u_0) \geqslant \langle g, v - u_0 \rangle$ при всех $v \in \chi$, то при $w \in \chi$ имеем $\beta(u_0, w - u_0) \geqslant \langle g, w - u_0 \rangle$. Сравнивая это с неравенством, приведенным выше, получаем, что $\beta(w - u_0, w - u_0) \leqslant 0$. Но форма β коэрцитивна и, следовательно, $\|w - u_0\| = 0$, т. е. $w = u_0$.

Поскольку u_0 является пределом любой слабо сходящейся подпоследовательности $\{u_\varepsilon\}$, то тем самым доказано, что $u_\varepsilon \to u_0$ слабо в H.

Осталось показать, что эта сходимость сильная. Имеем

$$\beta_0 \|u_\varepsilon - u_0\|^2 \leqslant \beta(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) = \beta(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) - \beta(u_0, u_\varepsilon - u_0).$$

Так как $\beta(u_0, u_\varepsilon - u_0) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\beta(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0) \leqslant \langle g, u_\varepsilon - u_0 \rangle \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $u_\varepsilon \to u_0$ сильно в H. ▮

Оставшаяся часть параграфа посвящена применению теоремы 1.7 к вопросу существования решения в вариационном неравенстве для некоторого класса некоэрцитивных билинейных форм на гильбертовом пространстве. Эти результаты могут быть использованы для решения задачи с препятствием при граничных условиях неймановского типа (Лионс и Стампаккья [1]) (см. упр. 12) или для исследования задачи Фикеры [1].

Рассмотрим гильбертово пространство H с двойственным H' относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и с нормой $\|\cdot\|$, эквивалентной $p_0(\cdot) + p_1(\cdot)$, где

$$p_0(\cdot) \text{ — норма, относительно которой } H \text{ — предгильбертово пространство,} \tag{2.1, i}$$

$$p_1(\cdot) \text{ — полунорма на } H. \tag{2.1, ii}$$

Предположим, что

$$M=\{v\in H \mid p_1(v)=0\} \qquad (2.1,\ \text{iii})$$

— конечномерное подпространство и существует такое $c_1>0$, что

$$\inf_{\zeta\in M} p_0(v-\zeta)\leqslant c_1 p_1(v) \quad \forall v\in M. \qquad (2.1,\ \text{iv})$$

Предположим далее, что a — непрерывная билинейная форма на H и

$$a(v,\ v)\geqslant\alpha(p_1(v))^2 \quad \forall v\in H \text{ и некоторого } \alpha>0. \qquad (2.1,\ \text{v})$$

В частности, если $a(v,\ v)=0$, то $v\in M$, но не обязательно $v=0$.

Пусть, наконец, $K\subset H$ — замкнутое выпуклое множество, содержащее 0, и пусть $f\in H'$ таково, что $f=f_0+f_1$, где

$$|\langle f_1,\ v\rangle|\leqslant c_2 p_1(v) \quad \forall v\in H, \qquad (2.1,\ \text{vi})$$

$$\langle f_0,\ \zeta\rangle<0 \quad \forall\zeta\in M\cap K,\ \zeta\neq 0. \qquad (2.1,\ \text{vii})$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены все предположения* (2.1). *Тогда*

$$\exists u\in K:\quad a(u,\ v-u)\geqslant\langle f,\ v-u\rangle \quad \forall v\in K. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $K_R=K\cap\{v \mid \|v\|\leqslant R\}$. Поскольку K_R ограничено, то по теореме 1.4

$$\exists u_R\in K_R:\quad a(u_R,\ v-u_R)\geqslant\langle f,\ v-u_R\rangle \quad \forall v\in K_R. \qquad (2.3)$$

Согласно теореме 1.7, решение (2.2) существует тогда и только тогда, когда $\|u_R\|<R$ для некоторого $R>0$.

Теорему будем доказывать от противного. Допустим, что не существует решения (2.2), и покажем, что это приводит к противоречию.

В силу сделанного предположения, решение u_R неравенства (2.3) удовлетворяет условию $\|u_R\|=R$. Пусть $w_R=(1/R)\,u_R$, $R\geqslant 1$; тогда $\|w_R\|=1$. Кроме того, так как K выпукло, $u_R\in K$ и $0\in K$, то $w_R\in K$. Подставляя $v=0$ в (2.3) $(0\in K_R\subset K)$ и учитывая (2.1, v), получим

$$\alpha(p_1(u_R))^2\leqslant a(u_R,\ u_R)\leqslant\langle f,\ u_R\rangle\leqslant\|f\|_{H'}\|u_R\|=\|f\|_{H'}R. \qquad (2.4)$$

Следовательно, $p_1(u_R)=O\left(\sqrt{R}\right)$, или

$$p_1(w_R)=O\left(1/\sqrt{R}\right), \quad \text{т. е. } p_1(w_R)\to 0 \text{ при } R\to+\infty.$$

Поскольку $\|w_R\|=1$, $R\geqslant 1$, то существует такая подпоследовательность (которую мы снова обозначаем через $\{w_R\}$), что $w_R\to w$ слабо в H. Так как K выпукло и замкнуто, то $w\in K$. Далее, p_1 полунепрерывна снизу, и поэтому $p_1(w)=0$, так что $w\in K\cap M$.

Рассмотрим оператор проектирования P: $H\to M$, сопоставляющий каждому $v\in H$ элемент $\eta\in M$ по правилу: $p_0(v-\eta)=\inf\limits_{\zeta\in M} p_0(v-\zeta)$. Такой элемент η существует вследствие конечно-

мерности M. Покажем, что если $v_n \to v$ слабо в H, то $Pv_n \to Pv$ (сильно) в M.

Пусть $(\cdot,\ \cdot)_M$ и $(\cdot,\ \cdot)_{M^\perp}$ обозначают скалярные произведения соответственно в M и в его ортогональном дополнении $M^\perp$. Заметим, что можно определить $(\cdot,\ \cdot)_M$ следующим образом:

$$(u,\ v)_M = \tfrac{1}{4}(p_0(u+v) - p_0(u-v)),$$

и тогда скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$ на H запишется в виде

$$(u,\ v) = (u,\ v)_M + (u,\ v)_{M^\perp}.$$

В частности, если $\zeta \in M$, то $(v,\ \zeta) = (v,\ \zeta)_M$. Следовательно,

$$(Pv,\ \zeta) = (v,\ \zeta) \quad \forall \zeta \in M, \quad (Pv_n,\ \zeta) = (v_n,\ \zeta) \quad \forall \zeta \in M$$

и тем самым для некоторого $C > 0$

$$\| Pv_n \| \leqslant \| v_n \| \leqslant C \quad \forall n.$$

Так как M конечномерно, то из $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательность (обозначаемую снова через $\{v_n\}$), для которой $Pv_n \to \theta \in M$ при $n \to \infty$. Но $v_n \to v$ слабо в H, и поэтому $(Pv,\ \zeta) = (\theta,\ \zeta)$, если $\zeta \in M$, т. е. $\theta = Pv$.

Покажем, что $p_0(Pw_R) \geqslant c_3 > 0$ для достаточно больших R. Действительно, в противном случае найдется последовательность $R \to \infty$, такая что $p_0(Pw_R) \to 0$. Поскольку $p_1(w_R) = O(1/\sqrt{R})$, то

$$p_0(w_R) \leqslant p_0(w_R - Pw_R) + p_0(Pw_R) \leqslant c_1 p_1(w_R) + p_0(Pw_R) \to 0.$$

По условию норма $\|\cdot\|$ на H эквивалентна $p_0(\cdot) + p_1(\cdot)$ и, следовательно, $\|w_R\| \to 0$. Это противоречит тому, что $\|w_R\| = 1$, и нужная оценка доказана.

Далее, так как $w \in M$, то $Pw = w$ и, значит,

$$p_0(w) \geqslant c_3 > 0. \tag{2.5}$$

В частности, $M \cap K \neq \{0\}$, ибо по предыдущему $w \in M \cap K$ и вследствие (2.5) $w \neq 0$. Таким образом (см. 2.1, vii), $-\langle f_0,\ w\rangle = 2\beta > 0$ для некоторого $\beta > 0$. По доказанному $Pw_R \to Pw = w$ (сильно) в M, и поэтому найдется такое $R_0 > 0$, что $-\langle f_0,\ Pw_R\rangle \geqslant \beta > 0$ при всех $R \geqslant R_0$. Тогда с учетом (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha p_1(u_R)^2 &\leqslant \langle f,\ u_R\rangle = \langle f_0,\ u_R - Pu_R\rangle + \langle f_0,\ Pu_R\rangle + \langle f_1,\ u_R\rangle \leqslant \\ &\leqslant \|f_0\|_{H'} \cdot \|u_R - Pu_R\| + R\,\langle f_0,\ Pw_R\rangle + c_2 p_1(u_R). \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha p_1(u_R)^2 - R\,\langle f_0,\ Pw_R\rangle \leqslant c\,(p_0(u_R - Pu_R) + p_1(u_R)) \leqslant$ $\leqslant c' p_1(u_R)$, или $-R\,\langle f_0,\ Pw_R\rangle \leqslant c' p_1(u_R) = O(\sqrt{R})$. Но $-\langle f_0,\ Pw_R\rangle \geqslant$ $\geqslant \beta > 0$ при $R \geqslant R_0$, и мы приходим к неравенству $\beta R \leqslant O(\sqrt{R})$, которое, очевидно, невозможно при больших R. Полученное противоречие доказывает теорему. ∎

3. ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе в качестве одного из примеров применения теорем 1.4 и 1.7 и следствия 1.8 мы находим решение задачи для полулинейного уравнения.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1(x) \leqslant v(x) \leqslant \psi_2(x)$ в $\Omega\}$, где $\psi_1, \psi_2 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $\psi_1(x) \leqslant 0 \leqslant \psi_2(x)$, $x \in \partial\Omega$. Пусть, далее, функция F: $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена и измерима на компактных подмножествах $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ и непрерывна и не убывает по второму аргументу. Определим оператор L: $K \to H^1(\Omega)$, полагая

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \langle -\Delta u + F(x, u), \varphi\rangle = \int_\Omega \{u_{x_i}\varphi_{x_i} + F(x, u)\varphi\}\, dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Тогда $\langle Lu - Lv, u - v\rangle = \int_\Omega (u-v)_x^2\, dx + \int_\Omega (F(x, u) - F(x, v))(u-v)\, dx \geqslant \int_\Omega (u-v)_x^2\, dx$. Таким образом, L — коэрцитивный и строго монотонный оператор на K. Заметим, что L не определен на всем пространстве $H_0^1(\Omega)$. Но, поскольку K выпукло и замкнуто, легко видеть, что оператор L непрерывен на пересечении любого конечномерного подпространства с K, и, значит, существует единственный элемент

$$u \in K: \quad \int_\Omega \{u_{x_i}(v-u)_{x_i} + F(x, u)(v-u)\}\, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

4. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть отображение a: $\mathbb{R}^N \to (\mathbb{R}^N)'$, $a(\xi) = (a_1(\xi), \ldots, a_N(\xi))$, непрерывно и монотонно (см. определения гл. I, § 4). $(\mathbb{R}^N)'$ далее отождествляем с $\mathbb{R}^N$. В этом параграфе нас будут интересовать некоторые специальные векторные поля, удовлетворяющие определенным условиям роста на бесконечности и коэрцитивности. Более точное описание этих полей дает следующее

Определение 4.1. Будем говорить, что a — *сильно коэрцитивное монотонное векторное поле*, если существуют такие $R_0 > 0$, $K > 0$ и $c_0 > 0$, что

$$|a(\xi)| \leqslant K|\xi| \quad \forall |\xi| > R_0, \tag{4.1}$$

$$(a_i(\xi) - a_i(\eta))(\xi_i - \eta_i) \geqslant c_0|\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Для сильно коэрцитивного монотонного векторного поля a имеет смысл выражение $(-\partial/\partial x_i)\, a_i(u_x)$ в $H_0^1(\Omega)$. Оно определяет отображение $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, так как вследствие (4.1) $a_i(u_x) \in L^2(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, если $u \in H_0^1(\Omega)$. Это отображение строго монотонно (определение 1.1), коэрцитивно в смысле определения 1.3 и непрерывно на конечномерных подпространствах (определение 1.2).

В качестве примера рассмотрим векторное поле $a(\xi)=\xi$. Соответствующий ему оператор имеет вид $(-\partial/\partial x_i)\,a_i(u_x)=-\Delta u$. Очевидно, что a удовлетворяет всем условиям определения 4.1.

Пусть $f=f_0-\sum_1^N(\partial/\partial x_i)\,f_i\in H^{-1}(\Omega)$ и K — замкнутое выпуклое подмножество в $H_0^1(\Omega)$. Тогда, согласно теореме 1.7 и следствию 1.8, существует единственная функция

$$u\in K:\quad \int_\Omega a_i(u_x)(v-u)_{x_i}\,dx\geqslant\int_\Omega\{f_0(v-u)+f_i(v-u)_{x_i}\}\,dx\qquad \forall v\in K. \tag{4.3}$$

В качестве второго примера рассмотрим векторное поле

$$a_i(\xi)=(1+\xi^2)^{(\alpha-2)/2}\xi_i,\qquad \xi\in\mathbb{R}^N,\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant 2, \tag{4.4}$$

и оператор

$$Au=-\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(u_x)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\{[1+u_x^2]^{(\alpha-2)/2}u_{x_i}\}. \tag{4.5}$$

Здесь мы также можем воспользоваться теоремой 1.7 и следствием 1.8 для решения вариационного неравенства с оператором A при $1<\alpha\leqslant 2$ и выпуклым множеством

$$K=\{v\in H_0^{1,\alpha}(\Omega)\mid v\geqslant\psi \text{ в } \Omega\},\qquad \Omega\subset\mathbb{R}^N \text{ ограничено.}$$

Действительно, так как $|a(\xi)|\leqslant 1+|\xi|^{\alpha-1}$, то оператор A действует из $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ в $H^{-1,\alpha}(\Omega)$. Ясно, что отображение a монотонно как градиент выпуклой функции $(1/\alpha)(1+\xi^2)^{\alpha/2}$, непрерывно на конечномерных подпространствах и коэрцитивно в смысле определения 1.3, т. е. для некоторого $\varphi_0\in K$

$$\frac{\langle Av-A\varphi_0,\ v-\varphi_0\rangle}{\|v-\varphi_0\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}\to+\infty\quad\text{при}\quad \|v\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}\to+\infty.$$

Проверим последнее. Во-первых, заметим, что

$$\langle Au,\ u\rangle/\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}=\int_\Omega(1+u_x^2)^{(\alpha-2)/2}u_x^2\,dx\Big/\Big(\int_\Omega|u_x|^\alpha dx\Big)^{1/\alpha}\geqslant$$

$$\geqslant 2^{(\alpha-2)/2}\int_\Omega(|u_x|^\alpha-1)\,dx\Big/\Big(\int_\Omega|u_x|^\alpha dx\Big)^{1/\alpha}\geqslant 2^{(\alpha-2)/2}\Big(\int_\Omega|u_x|^\alpha dx\Big)^{1-(1/\alpha)}-$$

$$-\Big[2^{(\alpha-2)/2}\operatorname{mes}\Omega\Big/\Big(\int_\Omega|u_x|^\alpha dx\Big)^{1/\alpha}\Big]\to+\infty$$

при $\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}\to+\infty$. Во-вторых,

$$\frac{\langle Au-A\varphi_0,\ u-\varphi_0\rangle}{\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}\geqslant\frac{\langle Au,\ u\rangle}{\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}-\frac{\|a(u_x)\|_{L^{\alpha'}(\Omega)}\|\varphi_0\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}{\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}-$$

$$-\|a(\varphi_{0x})\|_{L^{\alpha'}(\Omega)}\frac{\|u-\varphi_0\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}{\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)}}.$$

Справа в этом неравенстве первый член стремится к $+\infty$, когда $\|u\|_{H_0^{1,\alpha}(\Omega)} \to +\infty$, а второй и третий члены ограничены. Это и означает, что a коэрцитивно.

Теперь из теоремы 1.7 с $f \in H^{-1,\alpha'}(\Omega)$ следует существование единственного элемента

$$u \in K: \quad \int_\Omega (1+u_x^2)^{(\alpha-2)/2} u_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K. \tag{4.6}$$

Если $\alpha = 1$, то оператор A появляется в задаче о минимальной поверхности. Этот оператор выражает значение средней кривизны. К сожалению, к таким операторам нельзя применять абстрактные теоремы § 1. Мы разъясним это позже.

Оператор средней кривизны связан с векторным полем

$$a_i(\xi) = (1+\xi^2)^{-1/2}\xi_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{4.7}$$

Строгая монотонность a следует из того, что a есть градиент строго выпуклой функции $(1+\xi^2)^{1/2}$. Однако векторное поле a не является сильно коэрцитивным, т. е. не удовлетворяет условию (4.2), и вариационное неравенство (4.6) действительно не имеет решения даже при $f = 0$ (см. Серрин [1]). Рассматриваемый важный случай ($\alpha = 1$) дает повод для введения понятия локально коэрцитивного векторного поля.

Определение 4.2. Непрерывное векторное поле $a(\xi) = (a_1(\xi), \ldots, a_N(\xi))$ называется *локально коэрцитивным*, если для каждого компакта $C \subset \mathbb{R}^N$ найдется такая константа $\nu = \nu(C)$, что $(a(\xi) - a(\eta))(\xi - \eta) \geq \nu|\xi - \eta|^2$ при всех $\xi, \eta \in C$. Заметим, что локально коэрцитивное векторное поле монотонно и что векторное поле (4.7) локально коэрцитивно.

В дальнейшем будет полезна следующая

Лемма 4.3. *Пусть a — локально коэрцитивное векторное поле на $\mathbb{R}^N$ и $M > 0$. Тогда существуют сильно коэрцитивное векторное поле $\tilde{a}$ и $K > 0$, такие что $\tilde{a}(\xi) = a(\xi)$ при всех $|\xi| < M$, и если $|\xi| > 3M$, то $|\tilde{a}(\xi)| \leq K|\xi|$.*

Другими словами, лемма утверждает, что вне некоторого шара можно так изменить локально коэрцитивное векторное поле, что новое поле уже будет сильно коэрцитивным в смысле (4.1).

Доказательство леммы. Пусть a — локально коэрцитивное векторное поле. Тогда существует такое $\nu > 0$, что

$$(a(\xi) - a(\eta))(\xi - \eta) \geq \nu|\xi - \eta|^2 \quad \forall |\xi|, |\eta| \leq 2M.$$

Пусть, далее, ψ и g — гладкие функции на $\mathbb{R}^1$, причем ψ неотрицательна и

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2M, \\ 0, & t \geq 3M, \end{cases}$$

а g — неубывающая функция и

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant M,\\ 1, & t\geqslant 3M.\end{cases}$$

Предположим еще, что $g(t)\geqslant c_0>0$ при $t\geqslant 2M$. Определим векторное поле $\tilde{a}(\xi)=\psi(|\xi|)a(\xi)+kg(|\xi|)\xi$, где положительная константа k будет выбрана позже. Мы хотим показать, что $\tilde{a}$ сильно коэрцитивно и удовлетворяет утверждению леммы.

Пусть $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^N$ и для определенности $|\xi|\leqslant|\eta|$. Тогда

$$0\geqslant|\xi||\eta|-|\eta|^2\geqslant(\xi,\ \eta)-|\eta|^2=(\eta,\ \xi-\eta)=\eta\cdot(\xi-\eta).$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

(1) $|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant M$. Тогда $\tilde{a}(\xi)=a(\xi)$, $\tilde{a}(\eta)=a(\eta)$ и ясно, что $(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta))(\xi-\eta)\geqslant\nu|\xi-\eta|^2$.

(2) $3M\leqslant|\xi|\leqslant|\eta|$. Тогда $\tilde{a}(\xi)=kg(|\xi|)\xi$, $\tilde{a}(\eta)=kg(|\eta|)\eta$ и понятно, что $(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta))(\xi-\eta)=k|\xi-\eta|^2\geqslant\nu|\xi-\eta|^2$, если $k\geqslant\nu$.

(3) $M\leqslant|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant 2M$. Тогда $\tilde{a}(\xi)=a(\xi)+kg(|\xi|)\xi$, $\tilde{a}(\eta)=$ $=a(\eta)+kg(|\eta|)\eta$ и, следовательно,

$$(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta))(\xi-\eta)=(a(\xi)-a(\eta))(\xi-\eta)+k(g(|\xi|)\xi-g(|\eta|)\eta)(\xi-\eta)\geqslant$$
$$\geqslant\nu|\xi-\eta|^2+k(g(|\xi|)\xi-g(|\eta|)\eta)(\xi-\eta).$$

Покажем, что $k(g(|\xi|)\xi-g(|\eta|)\eta)(\xi-\eta)\geqslant 0$. Действительно,

$$(g(|\xi|)\xi-g(|\eta|)\eta)(\xi-\eta)=g(|\xi|)|\xi-\eta|^2+(g(|\xi|)-g(|\eta|))\eta(\xi-\eta).$$

Правая часть этого тождества неотрицательна, так как соотношение $|\xi|\leqslant|\eta|$ влечет за собой неравенство $g(|\xi|)\leqslant g(|\eta|)$ и выше было показано, что $\eta\cdot(\xi-\eta)\leqslant 0$.

(4) $2M\leqslant|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant 3M$. Тогда $\tilde{a}(\xi)=\psi(|\xi|)a(\xi)+kg(|\xi|)\xi$, $\tilde{a}(\eta)=\psi(|\eta|)a(\eta)+kg(|\eta|)\eta$ и потому

$$(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta))(\xi-\eta)=[\psi(|\xi|)a(\xi)-\psi(|\eta|)a(\eta)](\xi-\eta)+$$
$$+k[g(|\xi|)\xi-g(|\eta|)\eta](\xi-\eta)=\psi(|\xi|)(a(\xi)-a(\eta))(\xi-\eta)+$$
$$+[\psi(|\xi|)-\psi(|\eta|)]a(\eta)(\xi-\eta)+kg(|\xi|)|\xi-\eta|^2+k[g(|\xi|)-$$
$$-g(|\eta|)]\eta(\xi-\eta)\geqslant[\psi(|\xi|)-\psi(|\eta|)]a(\eta)(\xi-\eta)+kg(|\xi|)|\xi-\eta|^2,$$

ибо, как и в случае (3), $[g(|\xi|)-g(|\eta|)]\eta(\xi-\eta)\geqslant 0$. Поскольку ψ — гладкая функция, то

$$\sup_{2M\leqslant|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant 3M}\left|\frac{[\psi(|\xi|)-\psi(|\eta|)]a(\eta)(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^2}\right|=K_1<+\infty.$$

Следовательно, $[\psi(|\xi|)-\psi(|\eta|)]a(\eta)(\xi-\eta)\geqslant-K_1|\xi-\eta|^2$ и, значит,

$$[\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta)](\xi-\eta)\geqslant[kg(|\xi|)-K_1]|\xi-\eta|^2\geqslant$$
$$\geqslant[kc_0-K_1]|\xi-\eta|^2.$$

Выбирая $k\geqslant\max(\nu,\ (K_1+\nu)/c_0)$, получим и для рассматриваемого случая, что $[\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta)](\xi-\eta)\geqslant\nu|\xi-\eta|^2$.

Докажем теперь это неравенство для любых векторов ξ и η из $\mathbb{R}^N$. Если $|\xi|=|\eta|$, то нужное соотношение сразу вытекает из предыдущего. Пусть $|\xi|<|\eta|$. Тогда существует не более шести точек ξ_i, $i=1, \ldots, j\leqslant 6$, на прямой, соединяющей ξ и η, в которых эта прямая пересекает сферы радиуса M, $2M$ и $3M$ с центрами в нуле. Имеем

$$\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta)=\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\xi_1)+\tilde{a}(\xi_1)-\tilde{a}(\xi_2)+\ldots+\tilde{a}(\xi_j)-\tilde{a}(\eta)$$

и

$$\xi-\eta=(|\xi-\eta|/|\xi-\xi_i|)(\xi-\xi_i).$$

Любые две последовательные точки ξ_i принадлежат одному и тому же шару, и поэтому

$$\begin{aligned}(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\eta))(\xi-\eta)&=(\tilde{a}(\xi)-\tilde{a}(\xi_1))(\xi-\xi_1)(|\xi-\eta|/|\xi-\xi_1|)+\\&+(\tilde{a}(\xi_1)-\tilde{a}(\xi_2))(\xi_1-\xi_2)(|\xi_1-\eta|/|\xi_1-\xi_2|)+\ldots\geqslant\\&\geqslant\nu|\xi-\xi_1|^2(|\xi-\eta|/|\xi-\xi_1|)+\nu|\xi_1-\xi_2|^2(|\xi-\eta|/|\xi_1-\xi_2|)+\ldots=\\&=\nu|\xi-\eta|(|\xi-\xi_1|+|\xi_1-\xi_2|+\ldots)=\nu|\xi-\eta|^2. \blacksquare\end{aligned}$$

Из доказательства леммы видно, что если локально коэрцитивное векторное поле a класса $C^1(\mathbb{R}^N)$, то $\tilde{a}$ также может быть выбрано класса $C^1(\mathbb{R}^N)$.

Заметим, кстати, что векторное поле класса $C^1(\mathbb{R}^N)$ локально коэрцитивное тогда и только тогда, когда для каждого компакта C найдется такая константа $\nu=\nu(C)$, что

$$\sum_{i,j}\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(\xi)\lambda_i\lambda_j\geqslant\nu|\lambda|^2\quad\forall\xi\in C,\ \lambda\in\mathbb{R}^N. \tag{4.8}$$

Действительно, если a локально коэрцитивно, то для любого компакта C существует такая константа $\nu=\nu(C)$, что

$$[a(\xi)-a(\eta)](\xi-\eta)\geqslant\nu|\xi-\eta|^2\quad\forall\xi,\ \eta\in C.$$

Отсюда следует, что если $\xi\in\operatorname{int}C$ и $\eta\in\mathbb{R}^N$, то для некоторого $\varepsilon>0$

$$\sum_i[a_i(\xi+t\eta)-a_i(\xi)]t\eta_i\geqslant\nu t^2|\eta|^2,\quad|t|<\varepsilon,$$

или

$$\sum_i t^{-1}[a_i(\xi+t\eta)-a_i(\xi)]\eta_i\geqslant\nu|\eta|^2,\quad|t|<\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $t\to 0$, получим

$$\sum_{i,j}\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(\xi)\eta_j\eta_i\geqslant\nu|\eta|^2\quad\forall\eta\in\mathbb{R}^N.$$

Понятно, что это справедливо для любого $\xi\in C$.

Пусть теперь выполняется (4.8). Тогда

$$\begin{aligned}(a(\xi)-a(\eta))(\xi-\eta)=\sum\left(\int_0^1\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(\xi+t(\eta-\xi))\,dt\right)(\xi_i-\eta_i)(\xi_j-\eta_j)\geqslant\\ \geqslant\nu|\xi-\eta|^2\quad\forall\xi,\ \eta\in C,\end{aligned}$$

где ν соответствует множеству, которое является выпуклой оболочкой C.

Кроме того, если $|\partial a_i/\partial p_j(\xi)|$ ограничено, то это влечет за собой (4.1), но обратное неверно.

Комментарии и библиографические указания

Мы затрудняемся назвать математика, впервые начавшего рассматривать монотонные операторы. Из современных математиков, заложивших основы этой области, назовем прежде всего Браудера [1, 2], Голомба, Минти [1, 2], Вишика [1], Сарантонелло [1]. Именно Браудер систематически использовал свойство монотонности операторов при изучении нелинейных эллиптических уравнений. Исследование вариационных неравенств в таком контексте проводилось Хартманом и Стампаккья и независимо Браудером.

Доказательства утверждений § 1 следуют работе Хартмана и Стампаккья [1]. Материал § 2 взят из работы Лионса и Стампаккья [1]. Специальный случай теоремы 2.3 ранее был доказан Фикерой [1]. В § 4 используются результаты, принадлежащие Брезису и Стампаккья [4]. Тот случай, когда монотонное векторное поле является градиентом выпуклой функции, рассмотрен Стампаккья [1].

Теория монотонных операторов имеет также интересные приложения к обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам (Скиаффино и Троянелло [1], Вергара-Кафарелли [1]).

Упражнения

1. Пусть a — билинейная форма на гильбертовом пространстве H и линейный оператор A: $H \to H'$ определен соотношением $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$. Покажите, что A коэрцитивен на H в смысле определения 1.3 гл. III в том и только в том случае, если форма a коэрцитивна в смысле определения 1.1 гл. II.

2. Пусть H — гильбертово пространство и a — неотрицательная билинейная форма на H. Докажите, что функция $u \to a(u, u)$ полунепрерывна снизу относительно слабой сходимости в H, т. е. $a(u, u) \leqslant \liminf a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ при $u_\varepsilon \to u$ слабо в H.

3. Докажите, что множество решений вариационного неравенства (1.4) есть замкнутое выпуклое подмножество в K.

4. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{K}$ — замкнутое линейное подпространство $L^2(\Omega)$, γ — непрерывная возрастающая функция, такая что $|\gamma(t)| \leqslant A + B|t|$, A, B — константы, $F \in L^2(\Omega)$. Покажите, что существует единственное $u \in \mathcal{K}$: $u + \gamma(u) - F \in \mathcal{K}^\perp$, где $\mathcal{K}^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{K}$. [*Указание*. Найдите $u \in \mathcal{K}$: $(u + \gamma(u) - F, v - u) \geqslant 0$ при всех $v \in \mathcal{K}$.]

5. Пусть K — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество гильбертова пространства H, F: $K \to K$ — нерастягивающее отображение и W: $H \to H$ — сжимающее отображение, такое, что $W(K) \subset K$. Покажите, что $F_\varepsilon = (1-\varepsilon)F + \varepsilon W$ при $0 < \varepsilon < 1$ является сжимающим отображением из K в K и что если x_ε — это единственная неподвижная точка F_ε, то x_ε сходится при $\varepsilon \to 0$ к неподвижной точке F.

6. Пусть Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^N$, E и F — непустые замкнутые подмножества в Ω и $\psi \in H^1(\Omega)$. Положим

$$K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ на } E \text{ и } v \leqslant \psi \text{ на } F\}$$

и
$$a(u, v) = \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}\, dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega).$$

Покажите, что существует $u \in K$: $a(u, v - u) \geqslant 0$ при всех $v \in K$ (см. Иорданов [1]).

7. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое множество и $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ — коэрцитивный монотонный оператор. Покажите, что задача *нахождения функции* $u \in L^2(\Omega)$, *такой что* $u \geqslant 0$, $Tu \geqslant 0$ *и* $(u, Tu) = 0$ *п. в. в* Ω, или эквивалентно $\min(u, Tu) = 0$ *п. в. в* Ω, может быть сформулирована как вариационное неравенство: *найти*

$$u \in K\colon \quad (Tu, v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

где $K = \{v \in L^2(\Omega) \mid v \geqslant 0$ *п. в. в* $\Omega\}$ (см. Брезис, Эванс [1]).

8. Покажите, что форма $a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx$ коэрцитивна на $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ограничено. Обобщите этот результат на форму $a(u, v) = \int_\Omega A^1 u A^2 u \, dx$, где A^1 и A^2 — линейные эллиптические операторы вида $A^i u = -\left(a^i_{jk} u_{x_k}\right)_{x_j} + \mu^i u$ (см. Брезис и Эванс [1], Ладыженская и Уральцева [1]).

9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область и $A^i\colon H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, — эллиптические операторы вида $A^i u = -\left(a^i_{jk} u_{x_k}\right)_{x_j}$, $i = 1, 2$. Покажите, что решение задачи Беллмана [1]: *найти*

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\colon \quad \min(A^1 u - f, \ A^2 u) = 0,$$

где $f \in L^2(\Omega)$, есть решение вариационного неравенства: *найти*

$$u \in K\colon \quad \int_\Omega (A^1 u - f) \, A^2 (v-u) \, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

где $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \mid A^2 v \geqslant 0\}$. Найдите условия, гарантирующие существование решения в этом неравенстве (Брезис и Эванс [1]).

10. Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства X с двойственным X' и отображение $A\colon K \to X'$ монотонно и непрерывно на конечномерных подпространствах. Тогда для существования

$$u \in K\colon \quad \langle Au, v-u \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K \tag{I}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлось непустое ограниченное подмножество C в K, такое что для каждого $w \in K \setminus C$ *найдется* $v \in C$, *при котором* $\langle Aw, v-w \rangle \leqslant 0$.

Кроме того, если K строго выпукло (в том смысле, что для любых $u, v \in K$ точки $\lambda u + (1-\lambda) v$, $0 < \lambda < 1$, лежат во внутренности K) и $A^{-1}(0)$ содержит не более одного элемента, то решение (I) единственно.

Это условие означает, что единственность решения уравнения $Av = 0$ влечет за собой единственность решения вариационного неравенства (I), если только K строго выпукло (Копполетта [1]).

11. Покажите, что оператор средней кривизны $Au = -(\partial/\partial x_i)\left[u_{x_i}/(1 + u_x^2)^{1/2}\right]$ не является сильно коэрцитивным, но векторное поле $p/(1+p^2)^{1/2}$ локально коэрцитивно.

12. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с гладкой границей $\partial\Omega$, $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geqslant 0$ на $\partial\Omega\}$ и $f = f_0 - \sum_1^N (f_i)_{x_i} \in H^{-1}(\Omega)$, причем $\int_\Omega f_0 \, dx < 0$. Покажите, что

$$\exists u \in K\colon \quad \int_\Omega u_{x_i} (v-u)_{x_i} \, dx \geqslant \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Запишите соответствующую дополнительную задачу и рассмотрите вопрос о единственности ее решения.

Глава **IV**

ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛЯРНОСТИ

1. МЕТОД ШТРАФА

Нам удалось применить абстрактную теорему существования к решению вариационного неравенства во многом вследствие того, что само понятие решения трактовалось очень широко: мы рассматривали так называемые слабые решения. В настоящей главе детально изучается вопрос о гладкости таких решений.

В граничной задаче для эллиптического уравнения гладкость решения такая же, как гладкость данных задачи. Однако решение задачи с препятствием не обладает этим свойством. Мы уже видели, что решение уравнения второго порядка не принадлежит, вообще говоря, классу C^2, несмотря на гладкость данных самой задачи. Этот пример показывает, что наша теория регулярности должна быть специально приспособлена к изучению вариационных неравенств.

В начале главы приводится краткое описание *метода штрафа*. Следует подчеркнуть, что этот метод (часто используемый для доказательства регулярности решений) иногда может применяться и для доказательства существования, когда не выполнены предположения общих теорем. С этим мы столкнемся чуть позже. Метод штрафа заключается в том, что вариационное неравенство заменяется семейством нелинейных граничных задач и последующим доказательством того, что их решения сходятся к решению исходного вариационного неравенства. Основная трудность при этом состоит в получении подходящих априорных оценок. Отметим также, что существуют различные способы выбора штрафа.

2. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\psi \in H^1(\Omega)$ и $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Положим

$$K = K_\psi = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ на } \Omega\}.$$

Метод штрафа будет приспособлен к изучению следующей задачи:

Задача 2.1. *Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Найти*

$$u \in K: \quad \int_\Omega u_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \geqslant \int_\Omega f(v-u)\, dx \quad \forall v \in K. \tag{2.1}$$

Мы будем также предполагать, что

$$f, \ \max(-\Delta\psi - f, \ 0) \in L^s(\Omega) \ \textit{для некоторого} \ N < s < \infty. \quad (2.2)$$

Будет показано, что в этих условиях решение u неравенства (2.1) принадлежит $H^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - (N/s)$. Основным инструментом доказательства при этом является следующая оценка, основанная на теореме Кальдерона — Зигмунда:

Пусть $v \in H_0^1(\Omega)$ таково, что $-\Delta v = F$ в Ω, где $F \in L^s(\Omega)$. Тогда

$$\|v\|_{H^{2,s}(\Omega)} \leq C_0(s, \ \Omega)\|F\|_{L^s(\Omega)}. \quad (2.3)$$

Интуитивно ясно, что решение задачи 2.1 должно удовлетворять условиям

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega \setminus I, \quad -\Delta u = -\Delta\psi \text{ в } I,$$

где $I = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}$, и поэтому нам надлежит найти u как решение следующей задачи Дирихле:

$$-\Delta u = \begin{cases} f & \text{в} \quad \Omega \setminus I, \\ -\Delta\psi & \text{в} \quad I, \end{cases} \qquad u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Из результатов § 6 гл. II известно, однако, что $-\Delta u = f + \mu$ в Ω (в смысле обобщенных функций), где μ — некоторая неотрицательная мера с носителем в I. Объединяя это с предыдущим, приходим к таким формальным соотношениям:

$$d\mu = (-\Delta\psi - f)\,dx \quad \text{в} \quad I, \quad d\mu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I.$$

Обозначим через θ функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0; \end{cases} \quad (2.5)$$

тогда эти соотношения эквивалентны равенству

$$d\mu = (-\Delta\psi - f)\,\theta(u - \psi)\,dx \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (2.6)$$

К сожалению, у нас нет способа заранее установить абсолютную непрерывность меры μ (которая, конечно, следует из (2.6)) и определить, что решение v задачи (2.4) (в которой $I = I(u)$ и u — известное решение (2.1)) принадлежит K. Но тем не менее (2.6) приводит к рассмотрению следующего семейства задач:

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= (-\Delta\psi - f)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + f && \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 && \text{на} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

где θ_ε — последовательность липшицевых функций, сходящаяся к θ (см. (2.5)) почти всюду в $\mathbb{R}$. Заметим, что поскольку u есть $-\Delta - f$-суперрешение, то, как известно, $I \subset \{x \mid -\Delta\psi(x) - f \geq 0\}$ и можно

заменить $-\Delta\psi-f$ на $\max(-\Delta\psi-f,\ 0)$. Граничная задача

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)+f \quad &\text{в}\quad &\Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 &\text{на}\quad &\partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.7}$$

называется *штрафной задачей.*

Лемма 2.2. *Пусть функция* $\theta\colon \mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ *равномерно липшицева, невозрастающая и* $0\leqslant\theta(t)\leqslant 1$. *Тогда если выполнены условия* (2.2), *то существует единственное*

$$w\in H_0^1(\Omega):\qquad -\Delta w=\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta(w-\psi)+f \quad в \quad \Omega.$$

Кроме того ($C_0(s,\ \Omega)$ — *константа в* (2.3)),

$$\|w\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant C_0(s,\ \Omega)\left(2\|f\|_{L^s(\Omega)}+\|\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\|_{L^s(\Omega)}\right).$$

Доказательство. Заметим, что так как θ ограничена, то $\theta(w-\psi)\in \in L^\infty(\Omega)$ для любой функции $w\in L^2(\Omega)$. Следовательно, обобщенная функция Lw, определенная соотношением

$$\langle Lw,\ \zeta\rangle=\int_\Omega\left\{w_{x_i}\zeta_{x_i}-[\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta(w-\psi)+f]\,\zeta\right\}dx,$$

принадлежит $H^{-1}(\Omega)$. Мы утверждаем, что L строго монотонно и коэрцитивно на $H_0^1(\Omega)$. Действительно, поскольку функция θ не возрастает, то

$$-[\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta(w-\psi)-\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta(v-\psi)](w-v)\geqslant 0,$$

и поэтому

$$\langle Lw-Lv,\ w-v\rangle=\int_\Omega(w-v)_{x_i}^2\,dx-\int_\Omega\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,(\theta(w-\psi)-$$
$$-\theta(v-\psi))\,(w-v)\,dx\geqslant\int_\Omega(w-v)_{x_i}^2\,dx=\|w-v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Далее, сходимость $w_n\to w$ в $H_0^1(\Omega)$ влечет за собой слабую сходимость $Lw_n\to Lw$ в $H^{-1}(\Omega)$, которая означает, очевидно, что L непрерывно на конечномерных подпространствах в $H_0^1(\Omega)$. Применяя следствие 1.8 гл. III, получаем существование решения w. Требуемая оценка следует из (2.3). ∎

Возьмем теперь конкретную функцию

$$\theta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant 0,\\ 1-(t/\varepsilon), & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon, \qquad \varepsilon>0,\\ 0, & t\geqslant\varepsilon,\end{cases} \tag{2.8}$$

и рассмотрим для $\varepsilon>0$ задачу Дирихле: найти

$$w\in H_0^1(\Omega):\qquad -\Delta w=\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta_\varepsilon(w-\psi)+f \quad в \quad \Omega. \tag{2.9}$$

Перейдем к основному результату этого параграфа

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (2.2) *и* u — *решение задачи* 2.1. *Тогда* $u \in H^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - (N/s)$, *и, кроме того, если* u_ε, $\varepsilon > 0$, — *решение* (2.9), *то* $u_\varepsilon \to u$ *слабо в* $H^{2,s}(\Omega)$.

Доказательство. Проверим сначала, что $u_\varepsilon \in K$, или эквивалентно, обозначая $\zeta = u_\varepsilon - \max(u_\varepsilon, \psi)$ ($\zeta \in H_0^1(\Omega)$), проверим, что $\zeta = 0$. В силу (2.9),

$$\int_\Omega \left\{u_{\varepsilon x_i}\zeta_{x_i} - [\max(-\Delta\psi - f, 0)\,\theta(u_\varepsilon - \psi) + f]\,\zeta\right\} dx = 0,$$

и по теореме Грина $\int_\Omega \left\{\psi_{x_i}\zeta_{x_i} + \Delta\psi\zeta\right\} dx = 0$. Вычитая это равенство из первого, получим

$$\int_\Omega (u_\varepsilon - \psi)_{x_i}\zeta_{x_i}\, dx = \int_\Omega [\max(-\Delta\psi - f, 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + \Delta\psi + f]\,\zeta\, dx.$$

Так как

$$\zeta_{x_i} = \begin{cases} (u_\varepsilon - \psi)_{x_i}, & \text{если} \quad \zeta < 0, \\ 0, & \text{если} \quad \zeta = 0, \end{cases}$$

то

$$\int_\Omega \zeta_{x_i}^2\, dx = \int_{\{\zeta < 0\}} [\max(-\Delta\psi - f, 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + \Delta\psi + f]\,\zeta\, dx.$$

Но неравенство $\zeta(x) = u_\varepsilon(x) - \psi(x) < 0$ означает, что $\theta_\varepsilon(u_\varepsilon(x) - \psi(x)) = 1$ и, следовательно,

$$\int_\Omega \zeta_{x_i}^2\, dx = \int_{\{\zeta < 0\}} [\max(-\Delta\psi - f, 0) + \Delta\psi + f]\,\zeta\, dx \leqslant 0,$$

т. е. $\zeta = 0$. По лемме 2.2 последовательность $\{u_\varepsilon\}$ ограничена в $H^{2,s}(\Omega)$ и поэтому содержит подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}\}$, которая сходится слабо в $H^{2,s}(\Omega)$ и равномерно в $\bar{\Omega}$ к $\tilde{u} \in H^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda = 1 - (N/s)$. При этом $\tilde{u} \in K$, так как $u_\varepsilon \in K$.

Для того чтобы показать, что $\tilde{u}$ — решение задачи 2.1, мы применим лемму Минти (гл. III, лемма 1.5) к монотонному оператору, определяемому уравнением (2.9). Пусть $v \in K$ таково, что $v \geqslant \psi + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\int_\Omega v_{x_i}(v - u_{\varepsilon'})_{x_i}\, dx - \int_\Omega [\max(-\Delta\psi - f, 0)\,\theta_{\varepsilon'}(v - \psi) + f](v - u_{\varepsilon'})\, dx \geqslant 0.$$

Поскольку $u_{\varepsilon'} \to \tilde{u}$ слабо в $H^{2,s}(\Omega)$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая, что $\theta_\varepsilon(v - \psi) = 0$, когда $\varepsilon < \delta$, будем иметь

$$\int_\Omega v_{x_i}(v - \tilde{u})_{x_i}\, dx - \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx \geqslant 0 \quad \forall v\colon\ \psi + \delta \leqslant v \in K.$$

Теперь переход к пределу при $\delta \to 0$ приводит к неравенству

$$\int_\Omega v_{x_i}(v - \tilde{u})_{x_i}\, dx \geqslant \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx \quad \forall v \in K.$$

Снова применяя лемму Минти, получаем, что $\tilde{u}=u$ — единственное решение задачи 2.1. Из единственности, в частности, вытекает, что вся последовательность $\{u_\varepsilon\}$ сходится к u слабо в $H^{2,s}(\Omega)$. ∎

Аппроксимации, которые мы использовали, обладают рядом интересных свойств.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия* (2.2). *Тогда если u — решение вариационного неравенства* (2.1) *и u_ε, $\varepsilon>0$, — решение штрафной задачи* (2.7) *с функцией θ_ε, определенной по формуле* (2.8), *то $\{u_\varepsilon\}$ — неубывающая последовательность и*

$$u(x)\leqslant u_\varepsilon(x)\leqslant u(x)+\varepsilon \quad \forall x\in\Omega,\ \varepsilon>0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon<\varepsilon'$ и $\zeta\in H_0^1(\Omega)$. Имеем

$$\int_\Omega (u_{\varepsilon'}-u_\varepsilon)_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx=\int_\Omega \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,[\theta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}-\psi)-\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]\,\zeta\,dx=$$

$$=\int_\Omega \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,[\theta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}-\psi)-\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)]\,\zeta\,dx+$$

$$+\int_\Omega \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,[\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)-\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]\,\zeta\,dx.$$

Положим здесь $\zeta=\min(u_{\varepsilon'}-u_\varepsilon,\ 0)$, $0\geqslant\zeta\in H_0^1(\Omega)$; тогда

$$\int_\Omega \zeta_{x_i}^2\,dx=\int_{\{\zeta<0\}} \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,[\theta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}-\psi)-\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)]\,(u_{\varepsilon'}-u_\varepsilon)\,dx+$$

$$+\int_\Omega \max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,[\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)-\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]\,\zeta\,dx.$$

Функция $\theta_{\varepsilon'}$ убывает, и поэтому $[\theta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}-\psi)-\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)]\,(u_{\varepsilon'}-u_\varepsilon)\leqslant\leqslant 0$, а так как $\theta_\varepsilon(t)<\theta_{\varepsilon'}(t)$ при $\varepsilon<\varepsilon'$ и $\zeta\leqslant 0$, то $[\theta_{\varepsilon'}(u_\varepsilon-\psi)-\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]\,\zeta\leqslant 0$. Это значит, что

$$\int_\Omega \zeta_{x_i}^2\,dx=0, \quad \text{т. е. } \zeta=0 \text{ и } u_\varepsilon\leqslant u_{\varepsilon'}.$$

Из сходимости $u_\varepsilon\to u$ следует, что $u_\varepsilon\geqslant u$, $\varepsilon>0$. Заметим далее, что $u+\varepsilon$ — суперрешение аппроксимационного уравнения. Действительно, поскольку u — решение вариационного неравенства, то

$$\int_\Omega (u+\varepsilon)_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx-\int_\Omega [\max(-\Delta\psi-f,\ 0)\,\theta_\varepsilon(u+\varepsilon-\psi)+f]\,\zeta\,dx=$$

$$=\int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx-\int_\Omega f\zeta\,dx\geqslant 0 \quad \forall\zeta\geqslant 0. \tag{2.10}$$

Кроме того, $u+\varepsilon=\varepsilon\geqslant u_\varepsilon$ на $\partial\Omega$. Выбирая теперь $\zeta=\min(u+\varepsilon-u_\varepsilon,\ 0)$ $(0\geqslant\zeta\in H_0^1(\Omega))$ и используя (2.7) и (2.9), получим, что $u_\varepsilon\leqslant u+\varepsilon$. ∎

Аналогичным образом, в качестве аппроксимирующей последовательности функций можно взять решения $\tilde{u}_\varepsilon$ задач

$$-\Delta\tilde{u}_\varepsilon = \max(-\Delta\psi - f, 0)\,\tilde{\theta}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon - \psi) + f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\tilde{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где

$$\tilde{\theta}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant -\varepsilon, \\ -(t/\varepsilon), & -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

При убывании ε функции $\tilde{u}_\varepsilon$ возрастают.

Для того чтобы проиллюстрировать метод штрафа, мы рассмотрели ради простоты изложения выпуклое множество, ассоциированное с однородными граничными значениями. Основная идея заключается в том, что решение вариационного неравенства принадлежит классу $H^{2,s}(\Omega)$, как только решение соответствующей штрафной граничной задачи обладает этим же свойством. Легко проверить, что утверждение теоремы 2.3 остается верным для выпуклого множества $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi$ в Ω, $v = g$ на $\partial\Omega\}$, где $g \in H^{2,s}(\Omega)$ и $\psi \leqslant g$ на $\partial\Omega$.

Перейдем к следующему примеру, который будет полезен при изучении задачи фильтрации (см. гл. VII).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с липшицевой границей $\partial\Omega = \overline{\partial_1\Omega} \cup \partial_2\Omega$, где $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$ — непересекающиеся открытые липшицевы гиперповерхности. Это означает, в частности, что определен оператор следа из $H^1(\Omega)$ в $L^2(\partial_1\Omega)$. Положим

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{на} \quad \partial_1\Omega\}$$

и допустим, что норма в $H_0^1(\Omega)$ является нормой и в V, т. е. форма

$$\int_\Omega v_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx, \qquad v, \zeta \in V,$$

коэрцитивна на V. Пусть $f \in L^2(\Omega)$, g, $\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi \leqslant g$ на $\partial_1\Omega$ и

$$K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{и} \quad v - g \in V\}. \tag{2.11}$$

По теореме 2.1 гл. II существует единственное

$$u \in K\colon \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \forall v \in K. \tag{2.12}$$

Функция u является также решением дополнительной задачи (доказательство этого мы здесь не приводим)

$$(-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{п. в.} \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$-\Delta u - f \geqslant 0, \; u - \psi \geqslant 0 \quad \text{п. в.} \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = g \text{ на } \partial_1\Omega, \quad \partial u/\partial\nu = 0 \text{ на } \partial_2\Omega,$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial_2\Omega$. Таким образом, вариационное неравенство (2.12) связано со смешанной граничной задачей (см. гл. II, смешанная задача 4.9). Наша цель — изучить гладкость решения u, предполагая, что оно удовлетворяет условию (2.14) ниже. Подчеркнем, что (2.14) не всегда имеет место: это зависит от того, как устроены множества $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ и функция g.

Пусть $f \in L^s(\Omega)$, $g \in H^{2,s}(\Omega)$ для некоторого $N < s < \infty$ и

$$\begin{aligned} w \in H^1(\Omega):\ -\Delta w = f \quad &\text{в} \quad \Omega, \\ w = g \ \text{на}\ \partial_1\Omega, \quad \partial w/\partial\nu = 0 \quad &\text{на} \quad \partial_2\Omega. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Пусть, далее, существует такая константа $C_0 > 0$, не зависящая от f, что

$$\|w\|_{H^{2,s}(\Omega)} \leqslant C_0 \left[\|f\|_{L^s(\Omega)} + \|g\|_{H^{2,s}(\Omega)}\right]. \tag{2.14}$$

В формулировке (2.13), конечно, имеется в виду, что

$$\int_\Omega w_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega f\zeta\,dx \qquad \forall \zeta \in V, \quad w - g \in V.$$

Теорема 2.5. *Пусть* $f \in L^s(\Omega)$, ψ, $g \in H^{2,s}(\Omega)$ *при* $N < s < \infty$, $\psi \leqslant g$ *на* $\partial_1\Omega$ *и выполнено* (2.14). *Тогда решение и вариационного неравенства* (2.12) *принадлежит* $H^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar\Omega)$, $\lambda = 1 - (N/s)$.

Для доказательства теоремы нужно рассмотреть аппроксимационные уравнения

$$\begin{gathered} -\Delta u_\varepsilon = \max(-\Delta\psi - f,\ 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) + f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon = g \ \text{на}\ \partial_1\Omega, \quad \partial u_\varepsilon/\partial\nu = 0 \ \text{на}\ \partial_2\Omega, \end{gathered}$$

где θ_ε определено по формуле (2.8) и для оценки u_ε нужно воспользоваться неравенством (2.14). Детали доказательства мы оставляем читателю.

3. КОЭРЦИТИВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Коэрцитивные векторные поля обсуждались в § 4 гл. III. Для того чтобы гарантировать гладкость решения вариационного неравенства, необходимо рассматривать векторные поля по меньшей мере класса C^1. В этом случае определение 4.1 из гл. III заменяется следующим.

Определение 3.1. Векторное поле a называется *C^1-сильно коэрцитивным*, если $a_i \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\begin{aligned} &(a(p) - a(q))(p - q) \geqslant \nu |p - q|^2, \qquad p,\ q \in \mathbb{R}^N, \\ &|(\partial a_i/\partial p_j)(p)| \leqslant M, \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

для некоторых $0 < \nu \leqslant M < \infty$.

Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Используя (3.1), легко проверить, что отображение $v \to -(\partial/\partial x_i)\, a_i(v_x)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, определяет квазилинейный оператор

$$A\colon\ H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \qquad Av = -(\partial/\partial x_i)\, a_i(v_x),$$

который монотонен и коэрцитивен. Если $v_n \to v$ в $H_0^1(\Omega)$, то вследствие гладкости поля a $Av_n \to Av$ слабо в $H^{-1}(\Omega)$ и, таким образом, A непрерывен на конечномерных подпространствах в $H_0^1(\Omega)$. Более того, как было отмечено в конце § 4 гл. III,

$$(\partial a_i/\partial p_j)(p)\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu\, |\xi|^2 \qquad \forall p,\ \xi \in \mathbb{R}^N,$$

т. е. оператор A равномерно эллиптичен в обычном смысле.

Пусть функция $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ такова, что $\max\limits_{\Omega} \psi > 0$ и $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Положим

$$K = K_\psi = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \ \text{ в } \ \Omega\}.$$

Задача 3.2. *Дана функция $f \in L^\infty(\Omega)$. Найти*

$$u \in K\colon\ \int\limits_\Omega a_i(u_x)(v-u)_{x_i}\, dx \geqslant \int\limits_\Omega f(v-u)\, dx \qquad \forall v \in K. \tag{3.2}$$

Существование решения в (3.2) было доказано в § 4 гл. III, и даже при значительно более слабых предположениях относительно ψ и f. Здесь мы обсуждаем гладкость этого решения.

Как и раньше, определим функцию

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 0, \\ 1-(t/\varepsilon), & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t \geqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0, \end{cases}$$

и рассмотрим задачу Дирихле: найти

$$w \in H_0^1(\Omega)\colon \qquad Aw = \max(A\psi - f,\ 0)\, \theta_\varepsilon(w-\psi) + f \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.3}$$

Так же как и в предыдущем параграфе, проверяется, что оператор

$$A_\varepsilon w = Aw - \max(A\psi - f,\ 0)\, \theta_\varepsilon(w-\psi) + f, \qquad w \in H_0^1(\Omega),$$

строго монотонен, коэрцитивен и непрерывен на конечномерных подпространствах в $H_0^1(\Omega)$. Поэтому, согласно следствию 1.8 гл. III, существует единственное решение задачи (3.3) для каждого $\varepsilon > 0$.

Сформулируем сейчас теорему, которая будет использована при установлении гладкости решения. Доказательство ее приведено в приложении.

Теорема 3.3. *Пусть a — векторное поле класса C^1 и $g \in L^\infty(\Omega)$. Предположим, что существует*

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega)\colon \qquad & Au = -(\partial/\partial x_i)\, a_i(u_x) = g \quad \text{в} \quad \Omega, \\ & u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{на} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

и что

$$(\partial a_i/\partial p_j)(u_x(x))\,\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N \quad \text{для п. в. } x\in\Omega,$$
$$|(\partial a_i/\partial p_j)(u_x(x))| \leqslant M, \quad 1\leqslant i,\ j\leqslant N,$$

для некоторых чисел $0<\nu\leqslant M<\infty$. *Тогда для каждого* s *найдется* $c_0=c_0(s,\ \nu,\ M,\ \Omega)$, *такое что* $\|u\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant c_0\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Отсюда сразу получаем

Следствие 3.4. *Если* a *есть* C^1*-сильно коэрцитивное векторное поле* (*см. определение* 3.1), *то решение* u *задачи* (3.4) *удовлетворяет неравенству* $\|u\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant c_0\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

В частности, справедливо

Следствие 3.5. *Если* $f\in L^\infty(\Omega)$ *и* u_ε, $\varepsilon>0$, — *решение* (3.3), *то* $u_\varepsilon\in H^{2,s}(\Omega)$, $1\leqslant s<\infty$ *и*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant c_0\big(2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}+\|A\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\big).$$

Эти результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3.6. *Пусть* u — *решение задачи* 3.2. *Тогда* $u\in H^{2,s}(\Omega)\cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $1\leqslant s<\infty$ *и* $0<\lambda<1$. *Более того,*

$$\|u\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant c_0(2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}+\|A\psi\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

где $c_0=c_0(s,\ \Omega,\ \nu,\ M)$, *и если* u_ε — *решение* (3.3), *то* $u_\varepsilon\to u$ *слабо в* $H^{2,s}(\Omega)$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Эта теорема по духу аналогична теореме 3.2, но ввиду ее частого использования приведем еще раз основные рассуждения. Прежде всего мы показываем, что $u_\varepsilon\in K$. Для этого рассматриваем срезку $\zeta=u_\varepsilon-\max(u_\varepsilon,\ \psi)\in H_0^1(\Omega)$, $\zeta\leqslant 0$, и доказываем, что на самом деле $\zeta=0$. Согласно (3.3),

$$\langle Au_\varepsilon,\ \zeta\rangle=\int_\Omega[\max(A\psi-f,\ 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)+f]\,\zeta dx \quad \forall\zeta\in H_0^1(\Omega),$$

и так как $\zeta\in H_0^1(\Omega)$ и ψ — гладкая функция, то

$$\langle A\psi,\ \zeta\rangle=\int_\Omega A\psi\zeta dx.$$

Вычитая из первого уравнения второе (с учетом того, что $\theta_\varepsilon(u_\varepsilon(x)-\psi(x))=1$, когда $\zeta(x)<0$), получим

$$\langle Au_\varepsilon-A\psi,\ \zeta\rangle=\int_{\{\zeta<0\}}[\max(A\psi-f,\ 0)-(A\psi-f)]\,\zeta dx\geqslant 0.$$

Напомним (см. гл. II, приложение A, теорема A.1), что в смысле обобщенных функций

$$\zeta_{x_i}=\begin{cases}u_{\varepsilon x_i}-\psi_{x_i}, & \zeta<0,\\ 0, & \zeta\geqslant 0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$0 \geqslant \langle Au_\varepsilon - A\psi,\ \zeta\rangle = \int\limits_{\{\zeta<0\}} [a_i(u_{\varepsilon x}) - a_i(\psi_x)](u_\varepsilon - \psi)_{x_i}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \nu \int\limits_{\{\zeta<0\}} (u_\varepsilon - \psi)^2_{x_i}\,dx = \nu \int\limits_\Omega \zeta^2_{x_i}\,dx,$$

т. е. $\zeta = 0$.

В силу следствия 3.5, последовательность $\{u_\varepsilon\}$ ограничена в $H^{2,s}(\Omega)$, и поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Ее предел $\tilde{u}$ есть решение (3.2). Это доказывается точно так же, как в теореме 2.3, а именно дважды применяется лемма Минти (гл. III, лемма 1.5). Детали мы оставляем читателю.

Поскольку решение u вариационного неравенства (3.2) единственно, отсюда вытекает, что вся последовательность $\{u_\varepsilon\}$ сходится к u. ∎

4. ЛОКАЛЬНО КОЭРЦИТИВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Теорему существования из гл. III нельзя непосредственно применить, например, к вариационному неравенству, связанному с векторным полем

$$a_i(p) = p_i/(1+p^2)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

(которое участвует в выражении для первой вариации интеграла площади), так как это векторное поле не является сильно коэрцитивным (см. § 4 гл. III). Для того чтобы доказать существование и гладкость решения такой задачи, мы сначала установим априорную оценку для градиента решения. Затем мы преобразуем наше векторное поле и тогда сможем воспользоваться предшествующей теорией.

Нам потребуются для этого некоторые предположения о характере области Ω. Напомним читателю, что факт существования решения граничной задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_x^2}} = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = g \ \text{на} \quad \partial\Omega$$

основан на определенных геометрических соотношениях между f и $\partial\Omega$. Напомним также, что векторное поле $a = (a_1, \ldots, a_N) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ называется *локально коэрцитивным* (см. гл. III, определение 4.2), если для каждого компакта $C \subset \mathbb{R}^N$ найдется $\nu = \nu(C) > 0$, такое что

$$[a(p) - a(q)](p-q) \geqslant \nu\,|p-q|^2 \quad \forall p,\ q \in C. \tag{4.1}$$

Пусть $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условиям $\max\limits_\Omega \psi > 0$, $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Положим

$$K = K_\psi = \{v \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \mid v \geqslant \psi \ \text{в} \ \Omega\}. \tag{4.2}$$

Заметим, что выпуклое множество K расположено в банаховом пространстве липшицевых функций, которое не является рефлексивным. Будем далее предполагать, что Ω *выпукло*.

Задача 4.1. *Найти*

$$u \in K\colon \int_\Omega a_i(u_x)(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

Легко видеть, что, согласно (4.1), решение задачи 4.1, если оно существует, единственно. Сформулируем нашу априорную оценку.

Лемма 4.2. *Пусть Ω выпукло, a — локально коэрцитивное векторное поле класса C^1 и $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ — решение задачи 4.1. Тогда* $\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Доказательство. Заметим сначала, что непрерывно дифференцируемая функция $u-\psi$ достигает своего минимума в каждой точке $x \in I$. Следовательно,

$$u_x(x) = \psi_x(x), \quad x \in I = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}. \tag{4.3}$$

Так как $u > \psi$ в $\Omega \setminus I$, то

$$Au = -(\partial/\partial x_i)\,a_i(u_x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I$$

в смысле обобщенных функций. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^N$ и $\zeta \in C_0^\infty(\Omega \setminus I)$; тогда

$$0 = \int_{\Omega\setminus I} a_i(u_x)(\partial\zeta/\partial\xi)_{x_i}\,dx = -\int_{\Omega\setminus I} \alpha_{ij}(x)(\partial u/\partial\xi)_{x_j}\zeta_{x_i}\,dx,$$

$$\text{где} \quad \alpha_{ij}(x) = (\partial a_i/\partial p_j)(u_x), \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N.$$

Из локальной коэрцитивности a и условия $|u_x| \in L^\infty(\Omega)$ вытекает, что

$$\alpha_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \text{п.в. в } \Omega\setminus I$$

$$\text{и} \quad |\alpha_{ij}(x)| \leqslant M \quad \text{п.в. в } \Omega\setminus I$$

для некоторых $0 < \nu \leqslant M < \infty$. Значит, мы можем применить слабый принцип максимума (гл. II, теорема 5.5) к $(\partial u/\partial\xi)(x)$:

$$|(\partial u/\partial\xi)(x)| \leqslant \sup_{\partial(\Omega\setminus I)} |(\partial u/\partial\xi)(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(\sup_I |(\partial\psi/\partial\xi)(y)|,\ \sup_{\partial\Omega} |(\partial u/\partial\xi)(y)|\right), \quad x \in \Omega\setminus I.$$

Второе неравенство следует из соотношения (4.3), и из него же следует, что

$$|(\partial u/\partial\xi)(x)| \leqslant \max\left(\sup_I |(\partial\psi/\partial\xi)(y)|,\ \sup_{\partial\Omega} |(\partial u/\partial\xi)(y)|\right) \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.4}$$

Вследствие выпуклости Ω для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ найдется аффинная функция π, такая что $\pi(x_0) = 0$, $\pi(x) \geqslant \max(\psi(x), 0)$

при $x \in \Omega$, $|\pi_x(x)| \leqslant \sup\limits_{\Omega} |\psi_x(x)|$. Покажем, что

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \pi(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Положим для этого $w = \min(u, \pi) \in K$; тогда $\int\limits_{\Omega} a_i(u_x)(w-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0$. Ясно, что $w - u \in H_0^1(\Omega)$ и $A\pi = -\dfrac{\partial}{\partial x_i} a_i(\pi_x) = 0$ в Ω. Таким образом, $\int\limits_{\Omega} a_i(\pi_x)(w-u)_{x_i}\,dx = 0$. Вычитая из этого равенства предыдущее неравенство, получим

$$\int\limits_{\Omega} [a_i(\pi_x) - a_i(u_x)](w-u)_{x_i}\,dx \leqslant 0.$$

Поскольку векторное поле a строго монотонно, то $w = u$, т. е. $u \leqslant \pi$. Аналогичным путем устанавливается, что $u \geqslant 0$ в Ω. Пусть n — внешняя нормаль к Ω в точке $x_0 \in \partial\Omega$; тогда

$$0 \leqslant (1/h)[u(x_0 - hn) - u(x_0)] \leqslant (1/h)[\pi(x_0 - hn) - \pi(x_0)], \quad h > 0,$$

и поэтому $0 \leqslant -(\partial u/\partial n)(x_0) \leqslant -(\partial \pi/\partial n)(x_0) \leqslant \|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)}$. Следовательно, согласно (4.4),

$$|(\partial u/\partial \xi)(x)| \leqslant \|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \Omega.$$

Наконец, для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $x_0 \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^N$, такие что $(\partial u/\partial \xi)(x_0) = \|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$, откуда получаем неравенство

$$\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon. \ \blacksquare$$

Центральным результатом является

Теорема 4.3. *Пусть a — локально коэрцитивное векторное поле класса C^1 на $\mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклая область с гладкой границей и функция $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ такова, что $\max\limits_{\Omega} \psi > 0$ и $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Положим*

$$K = \{v \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega\}.$$

Тогда существует единственное

$$u \in K\colon \quad \int\limits_{\Omega} a_i(u_x)(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \tag{4.5}$$

и, кроме того, $u \in H^{2,s}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ для $1 \leqslant s < \infty$, $0 \leqslant \lambda < 1$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{\Omega} |\psi_x|$ и $\tilde{a}$ — сильно коэрцитивное векторное поле, такое, что

$$\tilde{a}(p) = \begin{cases} a(p), & \text{если } |p| \leqslant M, \\ kp, & \text{если } |p| \geqslant 3M. \end{cases}$$

Такое векторное поле было построено в лемме 4.3 из гл. III. Существует единственный элемент

$$u \in K: \quad \int_\Omega \tilde{a}_i(u_x)(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

(см. § 4 гл. III). По теореме 3.6 $u \in C^1(\bar{\Omega})$, и поэтому мы можем применить предыдущую лемму и получить, что

$$\| u_x \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| \psi_x \|_{L^\infty(\Omega)} = M.$$

Следовательно, $\tilde{a}_i(u_x) = a_i(u_x)$ и u — единственное решение (4.5). ∎

5. ДРУГОЙ МЕТОД ШТРАФА

В этом параграфе рассматривается другой вид аппроксимационных уравнений, который основан на понятии монотонного графика. Мы показываем, что решения этих уравнений сходятся к решению соответствующего вариационного неравенства. Кроме того, это приводит к еще одному доказательству гладкости решения. Дальнейшие вопросы регулярности изучаются в последующих параграфах.

Мы всегда будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Выберем функцию $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую что

$$\alpha'(t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha(t) \begin{cases} = 0, & \text{если } t \geqslant 0, \\ < 0, & \text{если } t < 0, \\ \text{линейна,} & \text{если } |t| \text{ достаточно большое,} \end{cases}$$

и положим

$$\beta_\varepsilon(t) = \varepsilon t + (1/\varepsilon)\alpha(t), \quad \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 0, \\ -\infty, & t < 0. \end{cases}$$

Пусть $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ — препятствие, т. е. $\max_\Omega \psi > 0$ и $\psi \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, $f \in L^\infty(\Omega)$ и $a = (a_1, \ldots, a_N)$ — сильно коэрцитивное C^1-векторное поле. Мы будем аппроксимировать решение u задачи 3.2 решениями $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ уравнений

$$Au_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) = f \text{ в } \Omega. \tag{5.2}$$

Отметим, что так как функция β_ε невозрастающая, то оператор

$$v \to Av + \beta_\varepsilon(v - \psi) - f, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

строго монотонен, коэрцитивен и непрерывен на конечномерных подпространствах. Поэтому существует единственное решение уравнения (5.2). Его гладкость в Ω следует из хорошо известной теоремы (аналогичной теореме 3.3) об эллиптических уравнениях.

Лемма 5.1. *Пусть* u_ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, — *решение уравнения* (5.2). *Тогда*

$$\|Au_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c_1 \quad \text{и} \quad \|u_\varepsilon\|_{H^{2,s}(\Omega)}\leqslant c_0c_1, \qquad 1\leqslant s<\infty,$$

где $c_1=2(2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}+\|A\psi\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)})$ *и* $c_0=c_0(\nu, M, s, \Omega)$ — *константа из теоремы* 3.3.

Доказательство. Пусть $\alpha_\varepsilon(t)=(1/\varepsilon)\alpha(t)=\beta_\varepsilon(t)-\varepsilon t$. Покажем сначала, что функция $\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)$ равномерно ограничена по ε. Так как $\alpha_\varepsilon(t)=0$ при $t\geqslant 0$, то $\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)=0$ на $\partial\Omega$. Вычитая $A\psi$ из обеих частей в (5.2) и умножая затем полученное уравнение на $[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}$, где $p>0$ — четное число, получим

$$(Au_\varepsilon-A\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}=$$
$$=(f-A\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}.$$

Интегрирование по частям первого слагаемого в левой части этого равенства приводит к соотношению

$$\int_\Omega (Au_\varepsilon-A\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}\,dx=$$
$$=(p-1)\int_\Omega [a_i(u_{\varepsilon x})-a_i(\psi_x)](u_\varepsilon-\psi)_{x_i}\alpha'_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)[\alpha(u_\varepsilon-\psi)]^{p-2}\,dx\geqslant 0$$

вследствие монотонности a, четности p и того, что $\alpha'_\varepsilon(t)\geqslant 0$. Таким образом,

$$\varepsilon\int_\Omega(u_\varepsilon-\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}\,dx+\int_\Omega[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^p\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega(f-A\psi)[\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)]^{p-1}\,dx.$$

Снова, так как p четно и $t\alpha(t)\geqslant 0$, оба слагаемых в левой части полученного неравенства неотрицательны и поэтому

$$\int_\Omega|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)|^p\,dx\leqslant\int_\Omega|f-A\psi|\,|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)|^{p-1}\,dx.$$

Оценивая интеграл справа по неравенству Гёльдера, будем иметь

$$\|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)\|^p_{L^p(\Omega)}\leqslant\|f-A\psi\|_{L^p(\Omega)}\|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)},$$
$$\text{или}\quad \|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|f-A\psi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Переходя здесь к пределу при $p\to\infty$, получим

$$\|\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|f-A\psi\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Теперь покажем, что сама последовательность $\{u_\varepsilon\}$ ограничена. Запишем (5.2) в виде

$$Au_\varepsilon+\varepsilon u_\varepsilon=f-\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon-\psi)+\varepsilon\psi=g,$$

где $g \in L^\infty(\Omega)$. Умножая обе части этого равенства на $(u_\varepsilon)^{p-1}$ (p четно) и затем интегрируя, придем к соотношению

$$(p-1)\int_\Omega a_i(u_{\varepsilon x})\, u_{\varepsilon x_i}(u_\varepsilon)^{p-2}\,dx + \varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon^p\,dx = \int_\Omega g u_\varepsilon^{p-1}\,dx.$$

Первое слагаемое неотрицательно, так что $0 \leqslant \varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon^p\,dx \leqslant \int_\Omega g u_\varepsilon^{p-1}\,dx$.

Теперь снова применяем неравенство Гёльдера и получаем $\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqslant$ $\leqslant \|g\|_{L^p(\Omega)}$, откуда следует, что

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.4}$$

Вернемся к уравнению (5.2) и оценим его члены с помощью (5.3) и (5.4) для $0 < \varepsilon \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|Au_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} &\leqslant 2\,(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f - A\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}) \leqslant \\ &\leqslant 2\,(2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|A\psi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}) \equiv c_1.\end{aligned}$$

Этим доказано первое утверждение леммы. Второе следует из теоремы 3.3. ∎

Теорема 5.2. *Пусть u — решение задачи* 3.2, *а* u_ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, — *решение уравнения* (5.2). *Тогда*

$$u_\varepsilon \to u \text{ слабо в } H^{2,s}(\Omega), \quad 1 < s < \infty.$$

Доказательство. Пусть $\{u_{\varepsilon'}\}$ — подпоследовательность $\{u_\varepsilon\}$, которая сходится слабо к $\tilde{u} \in H^{2,s}(\Omega)$. Для доказательства того, что $\tilde{u}$ есть решение вариационного неравенства, воспользуемся стандартными рассуждениями. Поскольку оператор

$$v \to Av + \beta_\varepsilon(v - \psi) - f, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

монотонен, то по лемме Минти

$$\int_\Omega a_i(v_x)(v - u_\varepsilon)_{x_i}\,dx + \int_\Omega \beta_\varepsilon(v - \psi)(v - u_\varepsilon)\,dx \geqslant \int_\Omega f(v - u_\varepsilon)\,dx$$

$$\forall v \in H_0^{1,\infty}(\Omega).$$

Пусть $v \geqslant \psi + \delta$ при некотором $\delta > 0$. Тогда $\beta_\varepsilon(v - \psi) = \varepsilon(v - \psi) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и, в силу слабой сходимости,

$$\int_\Omega a_i(v_x)(v - \tilde{u})_{x_i}\,dx \geqslant \int_\Omega f(v - \tilde{u})\,dx.$$

Если $\tilde{u}(x_0) - \psi(x_0) < -2\delta < 0$ для некоторых $x_0 \in \Omega$ и $\delta > 0$, то найдутся окрестность $B_\rho(x_0)$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие что при $\varepsilon' < \varepsilon_0$

$$u_{\varepsilon'}(x) - \psi(x) < -\delta < 0 \quad \forall x \in B_\rho(x_0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\beta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}(x) - \psi(x)) &= \varepsilon'[u_{\varepsilon'}(x) - \psi(x)] + (1/\varepsilon')\,\alpha(u_{\varepsilon'}(x) - \psi(x)) \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon' C + (1/\varepsilon')\,\alpha(-\delta) \quad \forall x \in B_\rho(x_0)\end{aligned}$$

и константа $C \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что

$$\|\beta_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'} - \psi)\|_{L^\infty(\Omega)} \geqslant \varepsilon' C + (1/\varepsilon') |\alpha(-\delta)| \to \infty, \quad \varepsilon' \to 0.$$

Но это невозможно, и поэтому $\tilde{u} \geqslant \psi$, т. е. $\tilde{u} \in K$.

Поскольку любой элемент $v \in K$ мы можем приблизить функциями $v' \in K$, для которых $v' > \psi$, то в результате получаем неравенство

$$\int_\Omega a_i(v_x)(v - \tilde{u})_{x_i} dx \geqslant \int_\Omega f(v - \tilde{u})\, dx \qquad \forall v \in K.$$

Теперь еще раз применяем лемму Минти и приходим к тому, что $\tilde{u} = u$ — решение задачи 3.2 ∎

6. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этом параграфе мы показываем, что если поле a и функции ψ и f удовлетворяют определенным условиям гладкости, то вторые производные решения вариационного неравенства ограничены. Этот результат оказывается полезным при изучении коинцидентного множества решения u. Сначала он доказывается для аппроксимационных уравнений (5.2). При этом мы предполагаем, что векторное поле сильно коэрцитивно. Однако следует заметить, что если u — решение вариационного неравенства типа (3.2) для локально коэрцитивного векторного поля, то это поле можно так изменить (в соответствии с леммой 4.3 из гл. III), что u будет уже решением задачи для сильно коэрцитивного векторного поля (см. § 4).

Как обычно, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим, что *векторное поле* $a \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *сильно коэрцитивно,*

$$f \in C^1(\bar{\Omega}), \tag{6.1}$$

функция $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ *удовлетворяет условиям*

$$\max_\Omega \psi > 0 \quad \text{и} \quad \psi \leqslant 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Пусть функция $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\alpha(t) \begin{cases} < 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ = 0, & \text{если} \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\alpha'(t) \geqslant 0,\ t \in \mathbb{R}, \text{ и } \alpha''(t) \leqslant 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Положим $\beta_\varepsilon(t) = \varepsilon t + (1/\varepsilon)\alpha(t)$. Очевидно, что $\beta'_\varepsilon(t) > 0$ и $\beta''_\varepsilon(t) \leqslant 0$ для каждого $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ решение уравнения

$$Au_\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi) = f \text{ в } \Omega, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.3}$$

Как было показано в § 5, решение (6.3) существует и единственно. Кроме того, последовательность $\{u_\varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, ограничена в $H^{2,s}(\Omega)$ при каждом s, $1 \leqslant s < \infty$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (6.1) *и* (6.2). *Тогда для любого компакта* $K \subset \Omega$ *найдется такая константа* $C = C(K) > 0$, *что*

$$\sup_K |u_{\varepsilon x_i x_j}(x)| \leqslant C, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Доказательство опирается на оценки снизу несмешанных вторых частных производных. Для их получения рассмотрим неравенство, возникающее после двукратного дифференцирования (6.3). На первый взгляд этот подход не кажется многообещающим. Однако производные высших порядков функции u_ε выражаются через дивергенции функций из $L^s(\Omega)$, $s > N$, и тогда мы можем применить теорему B.2 из гл. II. При этом важную роль в получении дифференциального неравенства играет вогнутость β_ε.

Лемма 6.2. *Пусть* u_ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ — *решение* (6.3) *и множество* $K \subset \Omega$ *компактно. Тогда существует такая константа* $C_2 = C_2(K)$, *что для любого направления* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *выполнено неравенство*

$$(\partial^2/\partial\xi^2)\, u_\varepsilon(x) \geqslant C_2 \quad \forall x \in K, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$ и $u = u_\varepsilon$. В процессе доказательства мы не будем отмечать зависимость каких-либо величин от ε и будем обозначать через const любую постоянную, не зависящую от ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Удобно будет считать, что $u \in C^4(\Omega)$. С этой целью предполагаем временно, что ψ, f и a обладают достаточно высокой гладкостью. Поскольку окончательная оценка для C_2 зависит только от $\|(\partial/\partial\xi) f\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\psi\|_{H^{2,\infty}(\Omega)}$ и $\sup\limits_{i,j,k} |[\partial^2 a_j/(\partial p_i \partial p_k)](u_x)|$, то ясно, что результат справедлив и при предположении (6.1).

Заметим, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} a_j(u_x) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{x_i}\right\} = \frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)_{x_i} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{x_i},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} Au = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)_{x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{x_i}\right\}.$$

Так как $\beta''(t) \leqslant 0$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\beta(u-\psi) = \beta'(u-\psi)(u-\psi)_{\xi\xi} + \beta''(u-\psi)(u_\xi - \psi_\xi)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \beta'(u-\psi)(u-\psi)_{\xi\xi}.$$

Из этих двух соотношений получаем, что

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)\right)_{x_i} + \beta'(u-\psi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(u-\psi) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} f. \qquad (6.4)$$

Обозначим через $L = L_\varepsilon$ линейный оператор

$$Lw = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\, w_{x_j}\right]$$

и заметим, что

$$\begin{gathered} \nu\,|\lambda|^2 \leqslant \frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\lambda_i\lambda_j \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}^N, \\ \left|\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant N, \end{gathered} \tag{6.5}$$

для некоторых $0 < \nu \leqslant M < \infty$, не зависящих от ε. Это следствие сильной коэрцитивности a и ограниченности u_x (лемма 5.1).

Фиксируем теперь компакт $K \subset \Omega$, и пусть $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ — такая функция, что $\zeta = 1$ на K и $\zeta \geqslant 0$ в Ω. Можно показать, что для любого $w \in C^2(\Omega)$

$$L(\zeta w) = \zeta L w - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(w\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_j}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(u_x)\,\zeta_{x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_j}\right). \tag{6.6}$$

Положим в (6.6) $w = u_{\xi\xi}$ и умножим (6.4) на ζ. Получим

$$L(\zeta u_{\xi\xi}) + \zeta\beta'(u-\psi)(u-\psi)_{\xi\xi} \geqslant -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\xi\xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_i}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{\xi\xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_i}\right) + u_{\xi\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_j}\right) + \\ + \zeta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right) + \zeta\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}f.$$

Перепишем это в виде

$$L(\zeta u_{\xi\xi}) + \zeta\beta'(u-\psi)(u-\psi)_{\xi\xi} \geqslant -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{\xi\xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_j}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{\xi\xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_i}\right) + u_{\xi\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\,\zeta_{x_j}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial x_i}u_\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right)\right) - \zeta_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}u_\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x) + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\zeta\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}. \tag{6.7}$$

Любое слагаемое в правой части полученного неравенства (за исключением членов, содержащих f) представляет собой произведение вторых производных u на ограниченную функцию или производную от такого произведения. Следовательно, (6.7) можно записать в виде

$$L(\zeta u_{\xi\xi}) + \zeta\beta'(u-\psi)(u-\psi)_{\xi\xi} \geqslant g_0 + \sum_{i=1}^{N}(g_i)_{x_i}, \tag{6.8}$$

где $\displaystyle\sum_0^N \|g_i\|_{L^s(\Omega)} \leqslant \mathrm{const}\left(\|u\|^2_{H^{2,s}(\Omega)} + \|f_\xi\|_{L^s(\Omega)}\right)$

для любого $1 \leqslant s < \infty$. Согласно теореме 5.5 гл. II, существует решение $w \in H_0^1(\Omega)$ задачи

$$Lw = g_0 + \sum_1^N (g_i)_{x_i} \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$w = 0 \qquad\qquad \text{на } \partial\Omega,$$

и по теореме B.2 гл. II

$$\| w \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{const} \sum_0^N \| g_i \|_{L^s(\Omega)} = \text{const}.$$

Из (6.8) получаем, что

$$L(\zeta u_{\xi\xi} - w) + \zeta\beta'(u - \psi)(u_{\xi\xi} - \psi_{\xi\xi}) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Пусть теперь $x_0 \in \bar{\Omega}$ — такая точка, где $\zeta u_{\xi\xi} - w$ достигает своего минимума. Если $\zeta(x_0) = 0$, то

$$\zeta(x) u_{\xi\xi}(x) - w(x) \geqslant -w(x_0) \quad \text{в} \quad \Omega$$

и тем самым

$$\zeta(x) u_{\xi\xi}(x) \geqslant -2 \| w \|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Если же $\zeta(x_0) > 0$, то $x_0 \in \Omega$, $L(\zeta u_{\xi\xi} - w)|_{x_0} \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\zeta\beta'(u - \psi)(u_{\xi\xi} - \psi_{\xi\xi})|_{x_0} \geqslant 0.$$

Пусть $\zeta(x_0) > 0$ и $\beta'(t) > 0$; тогда $u_{\xi\xi}(x_0) \geqslant \psi_{\xi\xi}(x_0)$ и поэтому

$$\zeta(x) u_{\xi\xi}(x) - w(x) \geqslant \zeta(x_0) u_{\xi\xi}(x_0) - w(x_0) \geqslant \zeta(x_0) \psi_{\xi\xi}(x_0) - w(x_0).$$

Таким образом,

$$\zeta(x) u_{\xi\xi}(x) \geqslant - \| \psi \|_{H^{2,\infty}(\Omega)} - 2 \| w \|_{L^\infty(\Omega)} = c_2(K), \qquad x \in \Omega,$$

и, в частности,

$$u_{\xi\xi}(x) \geqslant c_2 \qquad \forall x \in K. \ \blacksquare$$

Доказательство теоремы 6.1. Как и раньше, при доказательстве не указывается зависимость каких-либо величин от ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Фиксируем некоторый компакт $K \subset \Omega$, и пусть $x_0 \in K$. Без ограничения общности можно предполагать, что $u_{x_i x_j}(x_0) = 0$, $i \neq j$. Пусть C — ортогональная матрица,

$$y = (y_1, \ldots, y_N) = x_0 + C(x - x_0),$$
$$u'(y) = u(x) = u(x_0 + {}^tC(y - x_0)),$$

где ${}^tC$ — матрица, транспонированная к C. Отсюда следует, что u' — решение уравнения

$$-(\partial/\partial y_i) a_i'(u_y') + \beta(u' - \psi') = f' \quad \text{в} \quad \Omega',$$
$$u' = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega',$$

где $\psi'(y)=\psi(x)$, $f'(y)=f(x)$ и $\Omega'=x_0+C(\Omega-x_0)$. Векторное поле a' определяется формулой

$$a'(p)=Ca({}^tCp),$$

причем векторы a, a' и p понимаются как вектор-столбцы. Согласно (6.1), a' сильно коэрцитивно, ибо

$$(a'(p)-a'(q),\ p-q)=(a({}^tCp)-a({}^tCq),\ {}^tCp-{}^tCq)\geqslant \geqslant \nu\,|{}^tCp-{}^tCq|^2=\nu\,|p-q|^2,$$

где ν — константа коэрцитивности первоначального поля a. Кроме того,

$$\left|\frac{\partial^2 a_j'(p)}{\partial p_l\,\partial p_k}\right|\leqslant\left(\sum_{k,\,l,\,m}\left|\frac{\partial^2 a_k(p)}{\partial p_l\,\partial p_m}\right|^2\right)^{1/2},\quad 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant N.$$

Следовательно, для u' справедливы заключения лемм 5.1 и 6.2 с константами C_i, $i=1, 2$, умноженными, быть может, лишь на норму некоторой функции N переменных. Выберем C так, чтобы $u'_{y_iy_j}(x_0)=0$ при $i\neq j$. Это означает, что про выбранную ранее точку $x_0\in K$ мы можем предполагать, что $u_{x_ix_j}(x_0)=0$, $i\neq j$. Тогда

$$Au(x_0)=-\sum(\partial a_i/\partial p_i)(u_x(x_0))\,u_{x_ix_i}(x_0)$$

$$\text{и}\quad (\partial a_i/\partial p_i)(u_x(x_0))\geqslant\nu>0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Таким образом,

$$C_2\leqslant u_{x_ix_i}(x_0)\leqslant\frac{1}{\nu}\left(\|Au\|_{L^\infty(\Omega)}-(N-1)\,\tilde C\sup_{k,\,j}\left|\frac{\partial a_k}{\partial p_j}(u_x(x_0))\right|\right),$$

$$1\leqslant i\leqslant N,\qquad \tilde C=\min(0,\ C_2),$$

и поэтому в любой системе координат $(x_1,\ \ldots,\ x_N)$

$$|u_{x_ix_j}(x_0)|\leqslant C(K),\qquad x_0\in K,\qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant N,$$

с некоторой константой $C(K)$. ∎

Теорема 6.3. *Пусть выполнено условие* (6.1) *и* u — *решение задачи* 3.2. *Тогда для каждого компакта* $K\subset\Omega$ *существует такая константа* $C(K)$, *что*

$$|u_{x_ix_j}(x)|\leqslant C(K)\qquad\forall x\in K.$$

Доказательство получается из слабой сходимости u_ε к u в $H^{2,s}(\Omega)$ и теоремы 6.1.

Следствие 6.4. *Пусть выполнено* (6.1) *и* u — *решение задачи* 3.2. *Если, кроме того,* $\psi<0$ *на* $\partial\Omega$, *то* $u\in H^{2,\infty}(\Omega)$.

Доказательство. Так как $\psi<0$ на $\partial\Omega$, то существует окрестность $\partial\Omega$ в Ω, где $u>\psi$, и, следовательно, в этой окрестности $Au=f$. Теперь стандартные рассуждения показывают, что $u\in C^2$ в указанной окрестности, а в ее дополнении $u\in H^{2,\infty}$ по теореме 6.3. ∎

7. ОГРАНИЧЕННАЯ ВАРИАЦИЯ

В этом параграфе мы показываем, что если выполнено (6.1) и $\psi \in C^3(\Omega)$, то Au есть функция локально ограниченной вариации. Это позволит установить ряд геометрических свойств коинцидентного множества.

Перейдем к точным определениям. Пусть $\omega \subset \Omega$ — открытое множество. Говорят, что функция $f \in L^1(\omega)$ есть функция ограниченной вариации в ω, или $f \in BV(\omega)$, если существует такая константа $C > 0$, что

$$\left| \int_\omega f\zeta_{x_i}\, dx \right| \leqslant C \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \forall \zeta \in C^\infty(\Omega).$$

Вариация $V_\omega f$ функции $f \in BV(\omega)$ определяется формулой

$$V_\omega f = \sup \left\{ \sum_1^N \int_\omega f\zeta_{ix_i}\, dx \,\middle|\, \zeta_i \in C^\infty(\Omega),\ \sum_1^N \zeta_i^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{7.1}$$

Если $V_\omega f < \infty$ для каждого $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$, то мы говорим, что f — функция локально ограниченной вариации, и пишем $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$.

Легко усмотреть, что при $N = 1$ наше определение переходит в классическое определение ограниченной вариации. Действительно, обобщенные производные функций из $BV(\omega)$ суть меры (заряды) на ω. Это следует из теоремы Шварца, поскольку обобщенные функции $T_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$(T_i, \zeta) = V_\omega f \cdot \int_\omega \zeta\, dx - \int_\omega \zeta_{x_i} f\, dx, \quad \zeta \in C_0^\infty(\Omega),$$

неотрицательны. Теперь если $f_n \to f$ слабо в L^1 и $f_n \in BV(\omega)$, то $V_\omega f \leqslant \liminf_{n \to \infty} V_\omega f_n$.

Пусть $E \subset \Omega$ — борелевское множество и $\varphi_E \in BV(\Omega)$[1]. В этом случае будем говорить, что E — множество конечного периметра (в Ω), а сам периметр $P(E)$ определим как

$$P(E) = V_\Omega(\varphi_E).$$

Если $E \subset \Omega$ — компактное многообразие с гладкой границей ∂E, то $P(E)$ — площадь поверхности ∂E в классическом смысле. Таким образом, в общем случае $P(E)$ (когда он конечен) служит некоторой характеристикой типа площади поверхности границы E.

Пусть E — множество конечного периметра. Обозначим через μ_i, $i = 1, \ldots, N$, меры, которые суть обобщенные частные производные φ_E, т. е.

$$\int_\Omega \varphi_E \zeta_{x_i}\, dx = \int_\Omega \zeta\, d\mu_i, \quad \zeta \in C^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7.2}$$

---

[1]) φ_E — характеристическая функция множества E. — *Прим. перев.*

Если $\operatorname{supp}\zeta\cap\partial E=\varnothing$, то ясно, что $\int\limits_\Omega \varphi_E\zeta_{x_i}\,dx=0$, и поэтому

$$\operatorname{supp}\mu_i\subset\partial E,\quad i=1,\ \dots,\ N. \tag{7.3}$$

Формулы (7.2) и (7.3) являются аналогами теоремы Грина для множеств конечного периметра.

Наконец, отметим, что если E имеет конечный периметр, $F\subset E$ и $\operatorname{mes}(E\setminus F)=0$, то $P(E)=P(F)$. Это сразу следует из (7.1).

Как и в предыдущем параграфе, наша цель — доказать локальный результат. Читателю, который хочет воспринять лишь аналитические идеи доказательства, рекомендуется ниже не обращать внимания на функцию ζ и на все граничные интегралы.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (6.1) *и* (6.2) *и, кроме того,* $\psi\in C^3(\Omega)$. *Пусть, далее,* u_ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, — *решение уравнения* (6.3). *Тогда для каждого открытого множества* $\omega\subset\bar\omega\subset\Omega$ *существует константа* $C(\omega)>0$, *не зависящая от* ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, *такая что*

$$V_\omega(Au_\varepsilon)\leqslant C(\omega),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

Перед доказательством этой теоремы отметим два ее следствия.

Теорема 7.2. *Пусть выполнено* (6.1), $\psi\in C^3(\Omega)$ *и* u — *решение задачи* 3.2. *Тогда* $Au\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Утверждение сразу следует из полунепрерывности снизу вариации. ∎

Следствие 7.3. *Пусть выполнено* (6.1), $\psi\in C^3(\Omega)$ *и* $A\psi-f\neq 0$ *в* Ω. *Тогда если* u — *решение* 3.2, *то его коинцидентное множество* $I=\{x\in\Omega\mid u(x)=\psi(x)\}$ *имеет локально конечный периметр в* Ω.

Доказательство. Поскольку $Au\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $0\neq A\psi-f\in C^1(\Omega)$, то

$$\varphi_I(x)=[Au(x)-f(x)]/[A\psi(x)-f(x)]\ \text{ п. в. в }\ \Omega$$

есть функция локально ограниченной вариации в Ω. ∎

Доказательство теоремы 7.1. Как и раньше, не будем отмечать зависимость каких-либо величин от ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, и будем обозначать через const любую постоянную, не зависящую от ε. Рассмотрим следующую последовательность гладких функций γ_δ, $\delta>0$, которая аппроксимирует $\operatorname{sgn} t$:

$$|\gamma_\delta(t)|\leqslant 1,\quad \gamma_\delta'(t)\geqslant 0,\quad -\infty<t<\infty,$$

$$\gamma_\delta(0)=0,\quad \lim_{\delta\to 0}\gamma_\delta(t)=\operatorname{sgn} t=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Для данного $\omega\subset\bar\omega\subset\Omega$ выберем такую функцию $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$, что $\zeta=1$ на ω и $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ в Ω.

После дифференцирования (6.3) по направлению ξ получим

$$(\partial/\partial\xi)\, Au + \beta'(u-\psi)(u_\xi - \psi_\xi) = (\partial/\partial\xi)\, f \quad \text{в } \Omega, \tag{7.4}$$

$$[(\partial/\partial\xi)\, Au]\, \zeta\gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi) + \beta'(u-\psi)(u-\psi)_\xi\, \zeta\gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi) = \\ = (\partial f/\partial\xi)\, \zeta\gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi). \tag{7.5}$$

Обозначим $\gamma = \gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi)$. Тогда вычисления показывают, что

$$\int_\Omega [(\partial/\partial\xi)\, Au]\, \zeta\gamma\, dx = \int_\Omega (\partial/\partial\xi)\, a_j(u_x)\, \gamma_{x_j}\zeta\, dx + \int_\Omega (\partial/\partial\xi)\, a_j(u_x)\, \gamma\zeta_{x_j}\, dx =$$
$$= \int_\Omega (\partial a_j/\partial p_i)(u_x)\, [(\partial u_\xi/\partial x_i) - (\partial\psi_\xi/\partial x_i)]\, \gamma_{x_j}\zeta\, dx +$$
$$+ \int_\Omega (\partial/\partial\xi)\, a_j(u_x)\, \gamma\zeta_{x_j}\, dx + \int_\Omega (\partial a_j/\partial p_i)(u_x)\, (\partial/\partial x_i)\, \psi_\xi\gamma_{x_j}\zeta\, dx.$$

Поскольку a монотонно и $\gamma' \geqslant 0$, то

$$\int_\Omega (\partial a_j/\partial p_i)(u_x)\, [(\partial u_\xi/\partial x_i) - (\partial\psi_\xi/\partial x_i)]\, \gamma_{x_j}\zeta\, dx =$$
$$= \int_\Omega (\partial a_j/\partial p_i)(u_x)\, [(\partial u_\xi/\partial x_i) - (\partial\psi_\xi/\partial x_i)]\, [(\partial u_\xi/\partial x_j) - (\partial\psi_\xi/\partial x_j)]\, \gamma'\zeta\, dx \geqslant 0.$$

Далее,

$$-\int_\Omega [(\partial/\partial\xi)\, Au]\, \gamma\zeta\, dx \leqslant \int_\Omega (\partial/\partial x_j)\, [(\partial a_j/\partial p_i)(u_x)\, \psi_{\xi x_i}\zeta]\, \gamma\, dx -$$
$$- \int_\Omega (\partial/\partial\xi)\, a_j(u_x)\, \zeta_{x_j}\gamma\, dx.$$

Заметим теперь, что

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\, \psi_{\xi x_i}\zeta\right]\gamma\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\operatorname{supp}\zeta} \sup_{i,j}\left|\frac{\partial a_j}{\partial p_i}(u_x)\right| \sup_{i,j}\left(|\psi_{\xi x_i x_j}| + |\zeta_{x_j}|\,|\psi_{x_i\xi}|\right) dx +$$
$$+ \int_{\operatorname{supp}\zeta} \sup|\psi_{x_i\xi}|\left|\sum \frac{\partial^2 a_j}{\partial p_i\partial p_k}(u_x)\, u_{x_j x_k}\right| dx,$$

и, значит,

$$-\int_\Omega [(\partial/\partial\xi)\, Au]\, \gamma\zeta\, dx \leqslant \text{const}\,(\|\psi\|_{C^3(\operatorname{supp}\zeta)} + 1)\,\|u\|_{H^{2,s}(\Omega)} \tag{7.6}$$

для любого $s \leqslant \infty$. Эта оценка не зависит от ε и δ, и поэтому, используя (7.3), будем иметь

$$\int_\Omega \zeta\beta'(u-\psi)\, \gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi)(u_\xi - \psi_\xi)\, \zeta\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} + \int_\Omega |f_\xi|\,|\gamma_\delta(u_\xi - \psi_\xi)|\, dx \leqslant \text{const}.$$

Напомним, что

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial}{\partial\xi}\beta'(u-\psi)\,\gamma_\delta(u_\xi-\psi_\xi)=\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\beta(u-\psi)\right|$$

для каждой точки из Ω. Следовательно, по теореме об ограниченной сходимости $\int\limits_\Omega\zeta\,|(\partial/\partial\xi)\,\beta(u-\psi)|\,dx\leqslant\text{const}$. Возвращаясь к (7.2), получаем

$$\int\limits_\Omega|(\partial/\partial\xi)\,Au\,|\,\zeta\,dx\leqslant\text{const}+\int\limits_\Omega\zeta\,|(\partial f/\partial\xi)|\,dx\leqslant\text{const}+(1/N)\,C\,(\omega).$$

Теперь после интегрирования по частям приходим к требуемой оценке. ∎

8. ЛИПШИЦЕВЫ ПРЕПЯТСТВИЯ

В этом параграфе более детально изучаются задачи с препятствиями с целью включения в рассмотрение липшицевых препятствий, и в частности их важного подкласса многогранных препятствий. Ради простоты изложения мы ограничиваемся условиями § 4, а именно считаем, что $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — выпуклая область с гладкой границей $\partial\Omega$ и a — локально коэрцитивное векторное поле класса C^1. Пусть функция $\psi\in H^{1,\infty}(\Omega)$ является препятствием, т. е.

$$\max_\Omega\psi>0\quad\text{и}\quad\psi<0\quad\text{на}\quad\partial\Omega.$$

Далее нами исследуется

Задача 8.1. *Найти*

$$u\in K:\quad\int\limits_\Omega a_i(u_x)\,(v-u)_{x_i}\,dx\geqslant 0\qquad\forall v\in K,$$

где $K=K_\psi=\{v\in H_0^{1,\infty}(\Omega)\,|\,v\geqslant\psi$ *в* $\Omega\}$.

Теорема 8.2. *Существует единственное решение и задачи* 8.1 *и, кроме того,* $\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Доказательство. Эта теорема есть непосредственное следствие теоремы 4.3. Обозначим $M=\sup\limits_\Omega|\psi_x|$, и пусть функции $\psi_\sigma\in C^2(\Omega)$ таковы, что

$$\max_\Omega\psi_\sigma>0,\quad\psi_\sigma<0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,\quad\|\psi_{\sigma x}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant M+\sigma$$

$$\text{и}\quad\psi_\sigma\to\psi\ \text{равномерно в}\ \overline{\Omega}\ \text{при}\ \sigma\to 0.$$

Если u_σ — решение задачи 8.1 с препятствием ψ_σ, то из теоремы 4.3 следует, что

$$\|u_{\sigma x}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant M+\sigma\quad\text{и}\quad\|u_\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C,\tag{8.1}$$

где C не зависит от σ при малых σ. Следовательно, из $\{u_\sigma\}$ можно выбрать подпоследовательность (обозначаемую снова $\{u_\sigma\}$), которая сходится слабо в $H^1(\Omega)$ и равномерно в $\overline{\Omega}$ к некоторому элементу $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Кроме того, так как $\|u_x\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \liminf\limits_{\sigma \to 0} \|u_{\sigma x}\|_{L^\infty(\Omega)} = M$ и $u \geqslant \psi$, то $u \in K$.

Для доказательства того, что u — решение задачи 8.1, воспользуемся снова леммой Минти (гл. III, лемма 1.5). Пусть $v \in K$ и $v > \psi$ в Ω. Тогда найдется такое $\sigma' > 0$, что $v > \psi_\sigma$ для всех $\sigma \leqslant \sigma'$ и тем самым

$$\int_\Omega a_i(v_x)(v-u_\sigma)_{x_i}\,dx \geqslant 0 \quad \forall \sigma \leqslant \sigma'.$$

При $\sigma \to 0$ получаем

$$u \in K: \quad \int_\Omega a_i(v_x)(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0. \tag{8.2}$$

Легко видеть, что (8.2) справедливо для любого $v \in K$, и поэтому по лемме Минти u — решение задачи 8.1. Единственность, как всегда, следует из строгой монотонности a. ∎

Теорема 8.3. *Пусть G — класс всех липшицевых суперрешений оператора $Av = -(a_i(v_x))_{x_i}$, которые мажорируют ψ в Ω и неотрицательны на $\partial\Omega$. Тогда если u — решение задачи* 8.1, *то*

$$u(x) = \inf_{g \in G} g(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим, ибо оно аналогично доказательству теоремы 6.4 гл. II. Однако сформулируем

Следствие 8.4. *Пусть u и U — решения задачи* 8.1, *соответствующие препятствиям ψ и Φ. Тогда если $\psi \leqslant \Phi$ в Ω, то $u \leqslant U$ в Ω.*

Доказательство. Функция U есть суперрешение оператора A и $\psi \leqslant \Phi \leqslant U$. Теперь все следует из теоремы 8.3. ∎

Теорема 8.5. *Пусть u и u' — решения задачи* 8.1, *соответствующие липшицевым препятствиям ψ и ψ'. Тогда*

$$\|u-u'\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\psi-\psi'\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Доказательство. Обозначим $m = \|\psi-\psi'\|_{L^\infty(\Omega)}$; тогда из неравенства $\psi \leqslant u$ следует, что $\psi' \leqslant \psi + m \leqslant u + m$. Поскольку $u+m$ — суперрешение, то по теореме 8.3 $u' \leqslant u + m$. Аналогично, $u \leqslant u' + m$ и поэтому $|u-u'| \leqslant m$. ∎

Рассмотрим теперь следующую возможность. Пусть $\psi \in H^{1,\infty}(\Omega)$ — препятствие, которое удовлетворяет условию

$$\psi \in C^2(U) \text{ для открытого } U \subseteq \Omega.$$

По теореме 8.2 найдется такая последовательность $\{\psi_\sigma\}$, что ψ_σ сходится вместе с производными до второго порядка включительно к ψ равномерно на компактных подмножествах U. Для каждого $\sigma > 0$ обозначим через $u_\sigma \in K_{\psi_\sigma}$ решение задачи 8.1, и пусть u_ε — аппроксимации u_σ, определенные в (3.3). (То, что рассматриваемое здесь векторное поле лишь локально коэрцитивно, не столь важно, так как мы можем всегда его заменить (согласно лемме 4.3 гл. III) на сильно коэрцитивное векторное поле, не зависящее от σ.) Итак, u_ε удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} Au_\varepsilon &= \max(A\psi_\sigma, 0)\,\theta_\varepsilon(u_\varepsilon - \psi_\sigma) && \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 && \text{на} \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Зафиксировав открытые подмножества $U'' \subset U' \subset U$, можно локализовать оценку в следствии 3.4, заменяя u_ε на ζu_ε, где ζ — соответствующая срезка. В результате имеем

$$\| Au_\varepsilon \|_{L^\infty(U'')} \leqslant \mathrm{const}\,(\| A\psi_\sigma \|_{L^\infty(U')} + \| u_\varepsilon \|_{L^\infty(U')}).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\| Au_\sigma \|_{L^\infty(U'')} \leqslant \mathrm{const}\,(\| A\psi_\sigma \|_{L^\infty(U')} + \| u_\sigma \|_{L^\infty(U')})$$

и, учитывая, что $\| u_\sigma \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| \psi_\sigma \|_{L^\infty(\Omega)}$, приходим к оценке

$$\| u_\sigma \|_{H^{2,s}(U'')} \leqslant \mathrm{const}\,(\| A\psi_\sigma \|_{L^\infty(U')} + \| \psi_\sigma \|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Так как $u_\sigma \to u$ слабо в $H^1(\Omega)$, то

$$u_\sigma \to u \ \text{слабо в} \ H^{2,s}(U''), \qquad 1 \leqslant s < \infty,$$

и, следовательно,

$$\| u \|_{H^{2,s}(U'')} \leqslant \mathrm{const}\,(\| A\psi \|_{L^\infty(U')} + \| \psi \|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Этим доказана

Теорема 8.6. *Пусть u — решение задачи* 8.1, *соответствующее липшицеву препятствию ψ. Тогда если $\psi \in C^2(U)$ для некоторого открытого множества $U \subset \Omega$, то $u \in H^{2,s}(U'')$ для любого открытого множества $U'' \subset \overline{U}'' \subset U$.*

В качестве следствия сформулируем следующий принцип профиля контакта[1]).

Следствие 8.7. *Пусть a — локально коэрцитивное векторное поле класса C^2, ψ — липшицево препятствие, такое что $\psi \in C^2(U)$ для некоторого открытого множества $U \subset \Omega$, и $A\psi = 0$ в U. Тогда если u — решение задачи* 8.1, *соответствующее ψ, то $Au = 0$ в U и либо*

$$u(x) > \psi(x) \quad \forall x \in U,$$

либо $$u(x) = \psi(x) \quad \forall x \in \overline{U}.$$

---

[1]) В оригинале «principle of the face of contact». — *Прим. перев.*

Доказательство. По предыдущей теореме $u \in H^{2,s}(U'')$ для любого открытого множества $U'' \subset \bar{U}'' \subset U$, и поэтому мы можем найти Au по той же теореме. Ясно, что $Au=0$ в $U'' \cap (\Omega \setminus I)$. В $U'' \cap I$ имеем $u=\psi$, $u_x=\psi_{x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, и, следовательно,

$$u_{x_ix_j}(x)=\psi_{x_ix_j}(x) \quad \text{п.в. в} \quad U'' \cap I.$$

Таким образом, $Au=A\psi=0$ в U' (в смысле обобщенных функций). Гладкость a означает, что u, $\psi \in C^{2,\lambda}(U'')$ для некоторого $\lambda>0$. По теореме о среднем

$$L(u-\psi)=-(\partial/\partial x_i)[\alpha_{ij}(x)(\partial/\partial x_j)(u-\psi)]=0 \quad \text{в} \quad U'',$$

$$\text{где} \quad \alpha_{ij}(x)=\int_0^1 (\partial a_i/\partial p_j)\{\psi_x(x)+t[u_x(x)-\psi_x(x)]\}\,dt.$$

Это значит, что $u-\psi$ — решение уравнения $Lv=0$, где

$$Lv=-(\partial/\partial x_i)[\alpha_{ij}(x)(\partial v/\partial x_i)].$$

Вследствие того что функции u, ψ гладкие и a_i, $\alpha_{ij} \in C^{1,\lambda}(U'')$, мы можем применить классический принцип максимума и получить неравенство

$$u(x)-\psi(x)>\inf_{\partial U''}(u-\psi), \quad x \in U'',$$

за исключением тех $x \in U''$, для которых $u(x)=\psi(x)$, $x \in U''$. ∎

Если, например, ψ — многогранное препятствие, то коинцидентное множество состоит из некоторого числа граней и частей ребер; впрочем, оно может состоять лишь из кусков ребер.

Мы можем использовать предыдущую теорему для изучения задачи с препятствием, когда препятствие определено лишь на части Ω. Предположим, что $E \subset \Omega$ — компактное множество и $\psi \in C(E)$ допускает продолжение до функции из $H^1(\Omega)$. Пусть a — сильно коэрцитивное C^2-векторное поле и, как прежде,

$$A\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \qquad Av=-(\partial/\partial x_j)\,a_j(v_x), \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

По теореме 1.7 и следствию 1.8 гл. III существует функция

$$\begin{gathered} u \in K_\psi\colon \quad \langle Au, v-u\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K_\psi, \\ K_\psi=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ на } E\}, \end{gathered} \tag{8.3}$$

Обозначим через $w \in H^1(\Omega \setminus E)$ решение задачи

$$Aw=0 \text{ в } \Omega\setminus E, \quad w=\psi \text{ на } \partial E, \quad w=0 \text{ на } \partial\Omega,$$

и пусть

$$\tilde{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(x), & x \in E, \\ w(x), & x \in \Omega\setminus E, \end{cases}$$

Предположим, что *функция* $\tilde{\psi}$ *липшицева в* Ω. Тогда существует липшицева функция

$$\begin{gathered}\tilde{u} \in K_{\tilde{\psi}}: \quad \langle A\tilde{u},\ v-\tilde{u}\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K_{\tilde{\psi}},\\ K_{\tilde{\psi}} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \tilde{\psi} \text{ в } \Omega\}.\end{gathered} \tag{8.4}$$

Докажем, что $u=\tilde{u}$ (тогда, в частности, получим, что (8.3) допускает липшицево решение).

Поскольку $A\tilde{\psi}=0$ в $\Omega \setminus E$, то по предыдущей теореме $\tilde{u}=\tilde{\psi}$ или $\tilde{u}>\tilde{\psi}$ в $\Omega\setminus E$. Но в обоих случаях

$$A\tilde{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega\setminus E. \tag{8.5}$$

Пусть $v \in K_\psi$ и $\varepsilon>0$. Положим $v'_\varepsilon = \max(\tilde{\psi}-v-\varepsilon,\ 0)$ и заметим, что $v'_\varepsilon=0$ в окрестности $\partial\Omega \cup E$. Следовательно, $v'_\varepsilon \in H_0^1(\Omega\setminus E)$. Определим теперь функцию $v''_\varepsilon = v+v'_\varepsilon \in K_{\tilde{\psi}}$. Согласно (8.5),

$$\langle A\tilde{u},\ v-\tilde{u}\rangle = \langle A\tilde{u},\ v''_\varepsilon-\tilde{u}\rangle - \langle A\tilde{u},\ v'_\varepsilon\rangle = \langle A\tilde{u},\ v''_\varepsilon-\tilde{u}\rangle,$$

и так как $v''_\varepsilon \to v''_0 = v+v'_0 \in K_{\tilde{\psi}}$ при $\varepsilon\to 0$, то из (8.4) следует, что

$$\langle A\tilde{u},\ v-\tilde{u}\rangle = \langle A\tilde{u},\ v''_0-\tilde{u}\rangle \geqslant 0.$$

Часто приходится также сталкиваться с тонкими препятствиями, т. е. такими препятствиями, которые определены на подмногообразиях малых размерностей в Ω.

2. ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этом параграфе мы показываем, что развитая выше теория позволяет решить задачу, имеющую формальное сходство со смешанной граничной задачей. А именно рассматривается вариационное неравенство для линейного эллиптического оператора второго порядка на ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^N$, решение которого расположено над заданным препятствием и принимает предписанные граничные значения только на части $\partial\Omega$.

Пусть Ω — ограниченное открытое множество с гладкой границей $\partial\Omega$. Ради простоты считаем, что $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$ — открытые непересекающиеся гладкие подмногообразия $\partial\Omega$ и $\partial\Omega=\overline{\partial_1\Omega}\cup\overline{\partial_2\Omega}$. Положим

$$V=\{v\in H^1(\Omega) \mid v=0 \text{ на } \partial_1\Omega\}.$$

Пусть функция $\psi\in H^1(\Omega)$ такова, что $\psi\leqslant 0$ на $\partial_1\Omega$, и пусть

$$K=\{v\in V \mid v\geqslant\psi \text{ в } \Omega\}.$$

Рассмотрим равномерно эллиптический оператор второго порядка

$$Au=-\left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j}, \quad a_{ij}\in L^\infty(\Omega),$$

где коэффициенты a_{ij} удовлетворяют обычному условию эллиптичности. Оператор A задает билинейную форму

$$a(u, v)=\int_{\Omega} a_{ij}(x)\, u_{x_i}(x)\, v_{x_j}(x)\, dx.$$

Пусть T — обобщенная функция, действующая по правилу

$$\langle T, v\rangle=\int_{\Omega}[f_0 v+f_i v_{x_i}]\, dx+\int_{\partial_2\Omega} gv\, d\sigma, \quad v\in V,$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_N, g$ принадлежат некоторым пространствам L^p.

Если множество $\partial_1\Omega$ достаточно большое, т. е. такое, что справедливо неравенство Пуанкаре для функций из V, то форма a коэрцитивна на V, и тогда по теореме 2.1 гл. II существует единственное

$$u\in K:\quad a(u, v-u)\geqslant\langle T, v-u\rangle\quad \forall v\in K. \tag{9.1}$$

Нас интересует гладкость решения вариационного неравенства (9.1).

Теорема 9.1. *Пусть u — решение вариационного неравенства* (9.1), *где* $\psi\in L^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)$, $\psi\leqslant 0$ *на* $\partial_1\Omega$, $f_0\in L^{p/2}(\Omega)$, $f_j\in L^p(\Omega)$, $j=1, \ldots, N$, $p>N$ *и* $g\in L^q(\partial_2\Omega)$, $q>N-1$. *Тогда для некоторой константы C п. в. в* Ω

$$\psi(x)\leqslant u(x)\leqslant\max\left(\max_{\Omega}\psi, 0\right)+ \\ +C\left[\|f_0\|_{L^{p/2}(\Omega)}+\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|_{L^p(\Omega)}+\|g\|_{L^q(\partial_2\Omega)}\right].$$

Доказательство. Для каждого действительного $k\geqslant k_0=\max\left(\max_{\Omega}\psi, 0\right)$ положим $v=\min(u, k)\in K$. Подставляя v в (9.1) и повторяя, по существу, рассуждения, используемые при доказательстве теоремы B.2, получим, что функция

$$\mu(k)=\operatorname{mes} A(k)+\{\operatorname{mes}[A(k)\cap\partial_2\Omega]\}^{N/(N-1)}$$

удовлетворяет неравенству

$$\mu(h)\leqslant[c/(h-k)^{2^*}]\,|\mu(k)|^{\beta},\quad \beta>1,\quad \forall h>k>k_0.$$

Теперь утверждение теоремы следует из леммы B.1. ∎

Теорема 9.2. *Пусть u — решение вариационного неравенства* (9.1), *для которого выполнены предположения предыдущей теоремы. Тогда* $u\in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, *где* λ, $0<\lambda<1$, *зависит только от* Ω, N, p *и* q.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы C.2 гл. II и поэтому не приводится.

Суть теоремы 9.2 в установлении гёльдеровой непрерывности решения u. Если ψ отсутствует, мы сталкиваемся с проблемой регулярности решения смешанной граничной задачи для эллиптического уравнения, которая может быть разрешена методом усечения, примененным в теореме C.2 гл. II. Казалось бы, можно попытаться применить к нашим задачам теоремы регулярности, доказанные в § 4 и 5. Однако решение (как нетрудно убедиться) не принадлежит $H^{2,p}(\Omega)$ ни для какого $p<\infty$. На самом деле такой факт имеет место даже тогда, когда ψ отсутствует, но при этом не выполнены некоторые условия совместности данных задачи. По этому вопросу мы отсылаем читателя к работе Шамира [1] о смешанной граничной задаче.

Рассмотрим сейчас вариационное неравенство (9.1) с $f_i=0$, $i=1, \ldots, N$, и $g=0$. Его решение может быть аппроксимировано решениями некоторых квазилинейных смешанных граничных задач, связанных с эллиптическим оператором A.

Пусть $A\psi$ есть мера на Ω, а производная вдоль внешней конормали

$$\partial\psi/\partial\nu = a_{ij}\psi_{x_j}\nu_i, \qquad \nu=(\nu_1, \ldots, \nu_N) \text{ — внешняя нормаль,}$$

есть мера на $\partial_1\Omega$ и при этом

$$\max(A\psi - f,\ 0) \in L^p(\Omega), \qquad p > \tfrac{1}{2}N,$$
$$\max(\partial\psi/\partial\nu,\ 0) \in L^q(\partial_2\Omega), \qquad q > N-1.$$

Пусть θ — невозрастающая липшицева функция на $\mathbb{R}$ и $0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$. Рассмотрим следующую нелинейную смешанную граничную задачу:

$$\begin{aligned} &Au = \max(A\psi - f,\ 0)\,\theta(u-\psi) + f && \text{в} \quad \Omega,\\ &u = 0 && \text{на} \quad \partial_1\Omega,\\ &\partial u/\partial\nu = \max(\partial\psi/\partial\nu,\ 0)\,\theta(u-\psi) && \text{на} \quad \partial_2\Omega. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Вариационная формулировка этой задачи может быть получена с помощью квазилинейной формы

$$\begin{aligned} b_\theta(u, v) = a(u, v) &- \int_\Omega \max(A\psi - f,\ 0)\,\theta(u-\psi)\, v\, dx -\\ &- \int_{\partial_2\Omega} \max(\partial\psi/\partial\nu,\ 0)\,\theta(u-\psi)\, v\, d\sigma. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Действительно, (9.2) эквивалентна задаче нахождения функции

$$u \in V: \quad b_\theta(u, v) = \int_\Omega fv\, dx \qquad \forall v \in V. \tag{9.4}$$

Существование решения (9.4) следует из общей теории монотонных операторов, рассмотренной в гл. III.

Введем две последовательности функций типа θ:

$$\theta'_m(t)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad t\leqslant -1/m,\\ -mt, & \text{если} \quad -1/m\leqslant t\leqslant 0,\\ 0, & \text{если} \quad t\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\theta''_m(t)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad t<0,\\ -mt+1, & \text{если} \quad 0\leqslant t\leqslant 1/m,\\ 0, & \text{если} \quad t\geqslant 1/m.\end{cases}$$

Ясно, что θ'_m — неубывающая, а θ''_m — невозрастающая последовательность невозрастающих функций. Обе последовательности «сходятся» к следующей многозначной функции:

$$\tilde{\theta}(t)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad t<0,\\ [0,\ 1], & \text{если} \quad t=0,\\ 0, & \text{если} \quad t>0.\end{cases}$$

Пусть ψ — такая функция, что $\psi\leqslant 0$ на $\partial_1\Omega$, а $\tilde{\psi}\in H^{2,\,p}(\Omega)$ — решение (единственное) задачи Дирихле

$$\Delta\tilde{\psi}=f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \tilde{\psi}=\psi \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Рассмотрим замкнутые выпуклые подмножества V:

$$K=\{v\in V\mid v\geqslant\psi \text{ на } \partial\Omega\}, \qquad \tilde{K}=\{v\in V\mid v\geqslant\tilde{\psi} \text{ в } \Omega\}.$$

Теорема 9.3. *Если функция и есть решение вариационного неравенства*

$$u\in\tilde{K}: \quad a(u,\ v-u)\geqslant\int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \forall v\in\tilde{K}, \tag{9.5}$$

то и удовлетворяет вариационному неравенству

$$u\in K: \quad a(u,\ v-u)\geqslant\int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \forall v\in K. \tag{9.6}$$

Доказательство. Функция $u\in K$, так как $\tilde{K}\subset K$. Если $v\in K$, то либо $v\geqslant\tilde{\psi}$ в Ω, либо $v<\tilde{\psi}$ на некотором открытом подмножестве Ω положительной емкости. В первом случае неравенство (9.6) очевидным образом выполняется, и поэтому далее рассматриваем только ту ситуацию, когда соотношение $v\geqslant\tilde{\psi}$ в Ω не имеет места.

Представим v в виде $v=v_1+v_2$, где $v_1=\max(v,\ \tilde{\psi})$ и $v_2=v-v_1$. Тогда $v_1\in\tilde{K}$ и $v_2\in V$ удовлетворяет условию

$$v_2=\begin{cases} 0 & \text{в} \quad \{x\in\Omega\mid v\geqslant\tilde{\psi}\},\\ v-\tilde{\psi} & \text{в} \quad \{x\in\Omega\mid v<\tilde{\psi}\}.\end{cases}$$

Поскольку по предположению $v \in K$, то $v \geqslant \psi = \tilde{\psi}$ на $\partial\Omega$. Отсюда следует, что $\operatorname{supp} v_2 \subset \Omega$ и, таким образом, $v_2 \in H_0^1(\Omega)$. Запишем

$$a(u,\ v-u) = a(u,\ v_1-u) + a(u,\ v_2)$$

и покажем, что

$$a(u,\ v_2) = \int_\Omega f v_2\, dx. \tag{9.7}$$

Действительно, u есть слабый предел в $V \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ последовательности решений $u'_m \in V$ смешанных граничных задач

$$a(u'_m,\ \eta) = \int_\Omega [\max(A\tilde{\psi} - f,\ 0)\, \theta'_m(u'_m - \tilde{\psi}) + f]\, \eta\, dx +$$
$$+ \int_{\partial_2\Omega} [\max(\partial\psi/\partial\nu,\ 0)\, \theta'_m(u'_m - \tilde{\psi})]\, \eta\, d\sigma \quad \forall \eta \in V.$$

Так как $A\tilde{\psi} = f$ в Ω и $\operatorname{supp} v_2 \subset \Omega$, то мы видим, что $a(u'_m,\ v_2) = \int_\Omega f v_2\, dx$, и после предельного перехода получаем (9.7).

Наконец, вследствие того что u — решение (9.5) и $v_1 \in \tilde{K}$, приходим к соотношению

$$a(u,\ v-u) \geqslant \int_\Omega f(v_1-u)\, dx + \int_\Omega f v_2\, dx = \int_\Omega f(v-u)\, dx.$$

Это неравенство справедливо для любого $v \in K$, и тем самым теорема 9.3 доказана. ▮

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3

Основная цель этого приложения — дать набросок доказательства следующей теоремы, сформулированной в § 3.

Теорема А.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое множество с гладкой границей $\partial\Omega$, a — векторное поле класса C^1, такое что*

$$(\partial a_i/\partial p_j)(p)\, \xi_i \xi_j \geqslant \nu |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$
$$\text{и} \quad |\partial a_i/\partial p_j| \leqslant M, \quad 0 < \nu \leqslant M < \infty.$$

Пусть далее $g \in L^\infty(\Omega)$ и

$$u \in H_0^1(\Omega):\quad Au = -(\partial/\partial x_i)\, a_i(u_x) = g \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{A.1}$$

Тогда для каждого $s > 1$ существует такое $C_0 = C_0(s,\ \nu,\ M,\ \Omega)$, что

$$\|u\|_{H^{2,s}(\Omega)} \leqslant C_0 \|g\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{A.2}$$

Доказательство этой теоремы разбивается на несколько этапов.

Лемма А.2. *В предположениях теоремы* А.1 *функция* $u \in H^2(\Omega)$.

Напомним, что по условию

$$u \in H_0^1(\Omega):\quad \int_\Omega a_i(u_x)\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_\Omega g\, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{A.3}$$

Пусть $V \in H_0^1(\Omega)$ — решение задачи Дирихле

$$\int_\Omega V_{x_i}\eta_{x_i}\,dx = \int_\Omega g\eta\,dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega).$$

По теореме Кальдерона — Зигмунда (см. § 2), если $g \in L^s(\Omega)$, то $V \in H^{2,s}(\Omega)$ и, следовательно, $V_{x_i} \in H^{1,s^*}(\Omega)$, где $1/s^* = (1/s) - (1/N)$. Таким образом, (А.3) можно записать в виде

$$\int_\Omega a_i(u_x)\,\eta_{x_i}\,dx = \int_\Omega V_{x_i}\eta_{x_i}\,dx \qquad \forall \eta \in H_0^1(\Omega). \tag{A.3$'$}$$

(а) Докажем сначала, что $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Обозначим через $\varphi_{s,h}$ первую разделенную разность

$$\frac{\varphi(x_1, \ldots, x_s+h, \ldots, x_N) - \varphi(x_1, \ldots, x_N)}{h}$$

функции φ. Пусть ζ — любая функция из $H^1(\Omega)$ с компактным носителем в Ω и Ω' — такое открытое множество, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Тогда если $x \in \Omega'$ и h достаточно мало, то мы можем подставить функцию

$$(1/h)\,[\zeta(x_1, \ldots, x_N) - \zeta(x_1, \ldots, x_s - h, \ldots, x_N)]$$

в уравнение (А.3$'$) вместо φ. Делая затем замену переменных и используя интегральную форму теоремы о среднем, получаем тождество

$$\int_\Omega \left[\alpha_{ij}(x, h)\,(u_{x_i})_{s,h}\,\zeta_{x_j} - (V_{x_i})_{s,h}\,\zeta_{x_i}\right] dx = 0, \tag{A.4}$$

где функции α_{ij} удовлетворяют равномерно по h неравенствам

$$\nu\,|\xi|^2 \leqslant \alpha_{ij}(x, h)\,\xi_i\xi_j, \qquad |\alpha_{ij}(x, h)| \leqslant M.$$

Пусть $\alpha \in C^\infty$, $\operatorname{supp}\alpha \subset B_R(x) \subset \Omega'$ и $\alpha = 1$ в шаре $B_\rho(x)$, $\rho < R$. Тогда, обозначая $\zeta = \alpha^2 u_{s,h}$, после стандартных вычислений получим

$$\int_{B_\rho(x)} (u_{s,h})_x^2\,dx \leqslant \text{const}\left\{[1/(R-\rho)^2]\int_{B_R(x)} u_{s,h}^2\,dx + \int_{B_R(x)} g^2\,dx\right\},$$

где константа перед фигурными скобками не зависит от h.

Переходя здесь к пределу с учетом того, что $\overline{\Omega'}$ компактно, получаем

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leqslant K\,(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}). \tag{A.5}$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что функция $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ и удовлетворяет п. в. в Ω уравнению

$$-\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(u_x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = g. \tag{A.6}$$

(b) Для доказательства того, что $u \in H^2(\Omega)$, мы выпрямляем кусок $\partial_1\Omega$ границы $\partial\Omega$ и получаем в новых координатах тождество,

аналогичное установленному выше. В окрестности $\partial_1\Omega$ рассматриваем только те разности $u_{s,h}$, которые взяты по направлениям, параллельным $\partial_1\Omega$. Эти разности обращаются в нуль на $\partial_1\Omega$.

Используя аналогичную схему рассуждений, мы приходим к тому, что в норме $H^1(\Omega)$ указанные разности ограничены равномерно по h. Оценка нормальной производной может быть получена непосредственно из уравнения (A.6). Итак, $u \in H^2(\Omega)$.

Доказательство теоремы A.1. Переходя к пределу по некоторой подпоследовательности в (A.4) при $h \to 0$, будем иметь

$$\int_\Omega \left[(\partial a_i/\partial p_j)(u_x)(u_{x_s})_{x_i}\zeta_{x_j} + V_{x_i x_s}\zeta_{x_i}\right] dx = 0. \tag{A.7}$$

По теореме C.2 гл. II $u_{x_s} \in C^{1,\lambda}(\Omega') \cap H^1(\Omega')$ для некоторого λ, $0 \leqslant \lambda < 1$. Следовательно, п. в. в Ω

$$-\left[\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(u_x)(u_{x_s})_{x_i}\right]_{x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} V_{x_i x_s} = 0. \tag{A.8}$$

Если мы выпрямим $\partial_1\Omega$, то в новых координатах получим тождество, аналогичное приведенному выше. Рассматривая теперь только те разности $u_{s,h}$, которые взяты по направлениям, параллельным $\partial_1\Omega$, придем к тому, что производные u_{x_s} непрерывны по Гёльдеру вплоть до границы. Кроме того, мы знаем из (b), что $u_{x_s x_i} \in L^2(\Omega)$.

В силу замечания D.6 гл. II, $\int\limits_{\Omega(x,\rho)} z^2\,dx \leqslant c\rho^{N-2+2\lambda}$, где z — любая вторая производная функции u, исключая $u_{\nu\nu}$, т. е. исключая вторую частную производную по нормали. Но $u_{\nu\nu}$ могут быть выражены через другие производные согласно уравнению (A.6). Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\Omega(x,\rho)} u^2_{x_s x_i}\,dx \leqslant c\rho^{N-2+2\lambda}$$

для $s,\ i = 1, 2, \ldots, N$ и $0 \leqslant \lambda < 1$.

Из хорошо известной леммы Морри следует, что производные u_{x_s} непрерывны по Гёльдеру вплоть до границы Ω.

Поскольку уравнение (A.6) можно рассматривать как линейное уравнение с непрерывными коэффициентами $(\partial a_i/\partial p_j)(u_x)$, то, снова используя результат Кальдерона — Зигмунда, получаем неравенство (A.2).

Комментарии и библиографические указания

Теория регулярности решений вариационных неравенств представляет собой обширную область исследований, и в этих кратких заметках мы, к сожалению, не имеем возможности полностью ее отразить. Основными источниками для материала настоящей главы послужили работы Леви и Стампаккья [1] (§ 2), [2] (§ 3, 4, 8); Брезиса и Киндерлерера [1] (§ 5, 6 и приложение); Мерти и Стампаккья [1] (§ 9) и Киндерлерера [1] (§ 9). Подробное изложение предмета дано в работе Брезиса [1] (см. также Брезис и Стампаккья [1]). Сжатое изложение

метода штрафа и его следствий (особенно по отношению к теоремам интерполяции) можно найти у Лионса [1].

Понятие конечного периметра, введенное Де Джоржи, получило дальнейшее развитие в работе Миранды [1]. Существование и гладкость решения задачи 4.1, когда $a(p)=p/(1+p^2)^{1/2}$, рассматривали также Джакуинта и Пепе [1] и Миранда [2], которые изучали параметрическую задачу.

Вопрос о препятствиях, заданных на многообразиях малых размерностей, исследовался Леви [6]. Дополнительные результаты о гладкости решения получены в работах Леви [7], Фрезе [3, 4] и Кафарелли [3].

Общие теоремы существования для случая минимальной поверхности могут быть найдены у Джусти [1], Киндерлерера [1], Стампаккья и Виньоли [1].

По задаче со смешанными граничными условиями отметим работу Бейран-да-Вейга [1].

Связи между коэрцитивностью векторного поля a и гладкостью решения изучались Маццоне [1]. Специальный случай заданной средней кривизны, т. е. неоднородной задачи с полем $a(p)=p/(1+p^2)^{1/2}$, был рассмотрен Маццоне [1] и Герхардом [1]. Герхард [2] также дал другое доказательство теоремы 6.3.

Упражнения

1. Восполните детали доказательства теоремы 2.5.

2. Пусть $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N \mid 0<x_i<1,\ i=1,\ \dots,\ N\}$ — единичный куб, $f\in L^s(\Omega)$, $g\in H^{2,s}(\Omega)$ для некоторого s, $N<s<\infty$, и

$$w\in H^1(\Omega):\qquad -\Delta w=f \text{ в } \Omega,\qquad w=g \text{ в } \partial\Omega.$$

Покажите, что $w\in H^{2,s}(\Omega)$. [*Указание.* Сведите задачу к случаю $g=0$. Продолжите w на область $\tilde\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N \mid -1<x_N<0,\ 0<x_\sigma<1,\ \sigma=1,\ \dots,\ N-1\}$, полагая $w(x',\ x_N)=-w(x',\ -x_N)$, $x=(x',\ x_N)\in\tilde\Omega$. Покажите, что продолженная функция w является слабым решением уравнения в $\Omega\cup\tilde\Omega$. Это обстоятельство можно использовать для доказательства гладкости w на плоскостях $x_N=x_\sigma=0$, $1\leqslant\sigma\leqslant N-1$. Далее следует продолжить этот процесс, используя тот же метод отражения.]

3. Пусть Ω, f и g те же, что и в упр. 2. Положим

$$\partial_2\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N \mid x_N=0,\ 0<x_\sigma<1,\quad \sigma=1,\ \dots,\ N-1\}$$

и обозначим $\partial_1\Omega$ объединение остальных частей $\partial\Omega$. Пусть

$$w\in H^1(\Omega):\qquad -\Delta w=f \text{ в } \Omega,\qquad w=g \text{ на } \partial_2\Omega,\qquad \partial w/\partial\nu=0 \text{ на } \partial_1\Omega$$

и $g=|g_x|=0$ на границе $\partial_2\Omega$. Докажите, что $w\in H^{2,s}(\Omega)$. [*Указание.* Продолжите сначала w на полосу $\{-1<x_N<0\}$, полагая $w(x',\ x_N)=w(x',\ -x_N)$.]

4. Пусть Ω — выпуклая область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\psi\in H^{1,\infty}(\Omega)$ и $\psi=0$ на $\partial\Omega$. Обозначим через K множество липшицевых функций v на $\bar\Omega$, для которых $v\geqslant\psi$ в Ω и $v=0$ на $\partial\Omega$. Сопоставим локально коэрцитивному полю a функцию

$$u=T(a)\in K:\qquad \int_\Omega a_i(u_x)(v-u)_{x_i}\,dx\geqslant 0\qquad \forall v\in K,$$

и пусть

$$U(x)=\sup_a T(a)(x),\qquad x\in\Omega.$$

Покажите, что U — функция, ограничивающая выпуклую оболочку функции $\max(\psi,\ 0)$ в Ω.

5. Рассмотрите упр. 13 гл. II. Покажите, что при соответствующих условиях компоненты решения $u=(u^1,\ u^2)$ принадлежат $H^{2,s}(\Omega)\cap H^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1<s<\infty$. [*Указание.* Сформулируйте штрафную задачу.]

Глава **V**

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И КОИНЦИДЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах основное внимание было уделено вопросам существования и гладкости решения вариационного неравенства. При этом, как мы видели, ограничения на гладкость решения налагались условиями, определявшими рассматриваемое выпуклое множество. Это и привело к необходимости развивать специальную теорию регулярности. Для задач с препятствиями влияние этих условий проявлялось еще и в наличии коинцидентного множества. В настоящей главе мы исследуем некоторые свойства этого множества, главным образом с целью установления признаков регулярности его границы.

Подобные задачи представляют интерес по нескольким причинам. Например, они показывают, какие топологические свойства множества гарантируют его гладкость. Скажем, в задаче 4.1 гл. IV, если область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ строго выпукла, а препятствие ψ строго вогнуто и гладкое, то ∂I — гладкая жорданова кривая.

Кроме того, аналитичность свободной границы заложена в самой сути многих физических задач. Такова, например, задача об устойчивости кавитационного потока или потока воды через однородную пористую среду.

Прежде всего поясним понятие свободной границы. Рассмотрим задачу с препятствием. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое связное множество с гладкой границей $\partial\Omega$ и $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — такое препятствие, что $\max\limits_{\Omega} \psi > 0$ и $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Положим $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi$ в $\Omega\}$, и пусть

$$u \in K: \quad \int\limits_{\Omega} u_{x_i} (v-u)_{x_i}\, dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K. \tag{1.1}$$

Обозначим коинцидентное множество для u через

$$I = I(u) = \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}. \tag{1.2}$$

Мы уже видели, что функция $u - \psi \in C^1(\Omega)$ достигает своего минимума в каждой точке $x \in I$ и, следовательно,

$$u = \psi \quad \text{и} \quad u_{x_i} = \psi_{x_i} \quad \text{в} \quad I, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Кроме того, $\Delta u = 0$ в $\Omega \setminus I$. Таким образом, u можно рассматривать как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I, \\ u = \psi, \quad u_{x_i} &= \psi_{x_i} \quad \text{на} \quad \partial I. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Существование решения в задаче Коши для оператора Δ даже с гладкой начальной поверхностью ∂I требует, чтобы последняя удовлетворяла еще некоторым дополнительным условиям. Множество ∂I — это как раз то, что мы называем «свободной границей».

Укажем на некоторые причины, по которым граница ∂I для решения (1.1) должна быть аналитической (если ψ — аналитическая функция), и отметим некоторые трудности, возникающие при переходе к другим задачам. Сначала рассмотрим двумерный случай. Ограничимся пока вопросом об аналитичности. Обсуждение топологических аспектов отложим до § 6.

Сделаем сначала несколько замечаний о функциях двух переменных $g(x) = g(x_1, x_2)$. Пусть $z = x_1 + ix_2$ — комплексная переменная и $\bar{z} = x_1 - ix_2$ — ее сопряженная. Мы часто будем писать $G(z, \bar{z}) = g(x_1, x_2) = g((1/2)(z + \bar{z}), (1/2i)(z - \bar{z}))$, а также $G(z)$ вместо $G(z, \bar{z})$ (G необязательно голоморфна по z). Допустим, например, что g — вещественно аналитическая функция в окрестности точки $x = c$. Тогда

$$g(x) = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} a_{jk} (x_1 - c_1)^j (x_2 - c_2)^k,$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно для тех x, для которых $|x - c|$ достаточно мало. Если $\gamma = c_1 + ic_2$, то

$$\begin{aligned} G(z, \bar{z}) &= \sum_{j,\,k=0}^{\infty} a_{jk} \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}) - c_1\right)^j \left(\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) - c_2\right)^k = \\ &= \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \alpha_{jk} (z - \gamma)^j (\bar{z} - \bar{\gamma})^k. \end{aligned}$$

Здесь α_{jk} — некоторые константы, а ряд соответственно сходится абсолютно и равномерно, когда достаточно малы величины $|z - \gamma|$ и $|\bar{z} - \bar{\gamma}|$. Пусть $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ — другая комплексная переменная. Ряд $\sum \alpha_{jk} (z - \gamma)^j (\zeta - \bar{\gamma})^k$ сходится абсолютно и равномерно для малых значений $|z - \gamma|$ и $|\zeta - \bar{\gamma}|$ и является голоморфной функцией по z и ζ. Таким образом, если g — вещественно аналитическая функция в окрестности точки $x = c$, то можно считать, что $G(z, \zeta)$ при $\zeta = \bar{z}$ — голоморфная функция двух комплексных переменных:

$$G(z, \zeta) = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \alpha_{jk} (z - \gamma)^j (\zeta - \bar{\gamma})^k.$$

Теорема 1.1. *Пусть ω — односвязная ограниченная область в плоскости $z=x_1+ix_2$, $\Gamma\subset\partial\omega$ — жорданова дуга и $\Gamma=\partial\omega\cap U$ для некоторого открытого множества $U\subset\mathbb{R}^2$. Пусть, далее, u и ψ — такие функции, что $u\in C^1(\omega\cup\Gamma)$, ψ — вещественно аналитическая в окрестности $\omega\cup\Gamma$ и*

$$\Delta u=0 \text{ в } \omega,$$

$$u=\psi,\ u_{x_j}=\psi_{x_j} \text{ на } \Gamma,\quad j=1,\ 2, \tag{1.4}$$

$$\Delta\psi\neq 0 \text{ в } \overline{\omega\cup\Gamma}.$$

Тогда Γ допускает аналитическую параметризацию.

Доказательство. Мы докажем существование такой аналитической функции $z^*(z)$ в ω, что $z^*(z)=\bar z$ на Γ. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Допустим, что $z=0\in\Gamma$. Комплексная производная $f(z)=u_{x_1}-iu_{x_2}$ голоморфна в ω и имеет непрерывные граничные значения $F(z,\ \bar z)=\psi_{x_1}-i\psi_{x_2}$, $z\in\Gamma$. Рассмотрим в окрестности точки $z=0$ уравнение

$$f(z)=F(z,\ z^*(z)). \tag{1.5}$$

Заметим, что оно обращается в тождество, когда $z\in\Gamma$ и $z^*(z)=\bar z$. Далее,

$$\frac{\partial}{\partial z^*}F(z,\ z^*)\Big|_{(z,\ z^*)=(0,\ 0)}=\frac{1}{2}\Delta\psi(0)\neq 0,$$

и поэтому по теореме о неявной функции существует решение $z^*=\zeta(z,\ f)$ уравнения (1.5), которое голоморфно по $(z,\ f)$ в окрестности $(0,\ f(0))$. В частности, функция

$$z^*(z)=\zeta(z,\ f(z)),\ z\in\omega \text{ и } |z| \text{ мало},$$

голоморфна по z. В силу единственности неявной функции,

$$z^*(z)=\bar z,\ z\in\Gamma \text{ и } |z| \text{ мало}. \tag{1.6}$$

Таким образом, мы представили $\bar z$ на Γ как граничное значение голоморфной функции в ω. По принципу симметрии это означает, что Γ допускает аналитическую параметризацию. Действительно, пусть

$$\varphi\colon G\to\omega,\quad G=\{t=t_1+it_2\mid |t|<1,\ \operatorname{Im}t>0\},\quad \varphi(0)=0,$$

— конформное отображение G на ω, которое переводит интервал $(-1,\ 1)$ на Γ. Известно, что такое φ существует и $\varphi\in C(G\cup(-1,\ 1))$. Положим

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \operatorname{Im}t\geqslant 0,\ |t|<1,\\ \overline{z^*(\varphi(\bar t))}, & \operatorname{Im}t\leqslant 0,\ |t|<1.\end{cases} \tag{1.7}$$

Это голоморфная функция в $G\cup\{t\mid |t|<1,\ \operatorname{Im}t<0\}$, и из (1.6) вытекает, что она непрерывна при действительных t. Тогда по тео-

реме Морера Ф голоморфна в окрестности точки $t=0$ и, следовательно,

$$t \to \Phi(t), \quad t \text{ действительно и } |t| \text{ мало},$$

есть аналитическая параметризация соответствующей части Г. ∎

Топологическое условие, что Г — жорданова кривая, далее будет значительно ослаблено. Но, с другой стороны, ясно, что доказательство не проходит, если ψ не аналитична, так как именно в этой ситуации определялась функция $z^* = \zeta(z, f)$.

С несколько иной точки зрения (1.7) есть продолжение φ до функции Ф, удовлетворяющей однородному аналитическому уравнению $(\partial/\partial \bar{t})\Phi = 0$ при $|t| < 1$. В общем случае невозможно получить продолжение такого вида, и поэтому разработан другой подход, который можно интерпретировать как комбинацию классической теории потенциала и теории соболевских пространств, и особенно — свойств их следов.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

В этом параграфе мы рассмотрим другой метод определения гладкости ∂I — границы коинцидентного множества решения (1.1). Он годится для любых размерностей, но для его применения требуется некоторая предварительная гладкость ∂I. Этот метод основан на эффекте «выпрямления» свободной границы путем замены исходного уравнения существенно нелинейным уравнением.

Пусть u — решение (1.1),

$$\text{функция } \psi \text{ аналитична и } -\Delta\psi > 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{2.1}$$

Предположим далее, что

$$\begin{aligned} &\Gamma \subset \partial I \text{ — гиперповерхность класса } C^1, \\ &u_{ij} \in C(\Gamma \cup (\Omega \setminus I)), \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant N, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u_{ij} = u_{x_i x_j}$. Будем считать, что $0 \in \Gamma$ и направление внутренней нормали к $\Omega \setminus I$ в 0 совпадает с положительным направлением оси x_1. Положим $w = u - \psi$ и допустим (аналогично (1.3)), что

$$\Delta w = a \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I, \tag{2.3}$$

$$w = 0, \quad w_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.4}$$

где $a = -\Delta\psi$ — аналитическая функция в окрестности начала. Сделаем замену переменных

$$y_1 = -w_1 \equiv -w_{x_1}, \quad y_\alpha = x_\alpha, \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant N, \tag{2.5}$$

и введем функцию

$$v(y) = x_1 y_1 + w(x). \tag{2.6}$$

Мы будем называть (2.5) частичным преобразованием годографа, а (2.6) преобразованием Лежандра. Заметим, что (2.5) и (2.6) отличаются от традиционных определений переменой знака.

Легко видеть, что (2.5) осуществляет взаимно однозначное соответствие в окрестности точки $x=0$. Действительно, так как $w_i=0$ на Γ и $(1, 0, \ldots, 0)$ — нормаль к Γ в 0, то $w_{i\alpha}(0)=0$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $2 \leqslant \alpha \leqslant N$. Тогда из (2.3) следует, что $w_{11}(0)=a(0)>0$, и тем самым $(dy/dx)(0)$ невырожденно. Преобразование (2.5) отображает некоторую окрестность точки $x=0$ в $\Omega \setminus I$ на множество $U \subset \{y \mid y_1<0\}$ и некоторую окрестность $x=0$ в Γ на $\Sigma \subset \{y \mid y_1=0\}$. Используя определение преобразования Лежандра, получаем

$$dv=x_1\,dy_1+y_1\,dx_1+dw=x_1\,dy_1+\sum_{\alpha>1} w_\alpha\,dy_\alpha,$$

или

$$v_1=x_1, \quad v_\alpha=w_\alpha, \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant N. \tag{2.7}$$

Здесь производные функции v берутся по y, а функции w — по x. В частности, имеем параметризацию

$$x_1=\frac{\partial v}{\partial y_1}(0, x_2, \ldots, x_N), \quad (0, x_2, \ldots, x_N) \in \Sigma, \tag{2.8}$$

подмножества Γ' в Γ. Вопрос о гладкости Γ' сводится к вопросу о гладкости v в $U \cup \Sigma$. Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция v в U. Положим $y'=(y_2, \ldots, y_N)$.

Заметим прежде всего, что

$$\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} -w_{11} & -w_{12} & \ldots & -w_{1N} \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

и вследствие (2.7)

$$\frac{dx}{dy}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1N} \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $dy/dx=(dx/dy)^{-1}$, то получаем соотношения

$$w_{11}=-1/v_{11}, \quad w_{1\alpha}=v_{1\alpha}/v_{11}, \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant N.$$

Следовательно,

$$w_{\alpha\alpha}=\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=v_{\alpha\alpha}-\frac{v_{1\alpha}^2}{v_{11}}, \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant N.$$

Теперь из (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\begin{gathered} -\frac{1}{v_{11}}-\frac{1}{v_{11}}\sum_{\alpha>1} v_{1\alpha}^2+\sum_{\alpha>1} v_{\alpha\alpha}-a(v_1, y')=0 \quad \text{в} \quad U, \\ v=0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \end{gathered} \tag{2.9}$$

и при этом $-v_{11}(0) = 1/w_{11}(0) > 0$. Уравнение (2.9) — это эллиптическое уравнение с аналитическими коэффициентами в окрестности $y = 0$ в U. В этом случае, как хорошо известно (см. Морри [1], § 6.7), v есть аналитическая функция в окрестности $y = 0$ в $U \cup \Sigma$, и, таким образом, (2.8) означает, что Γ' допускает аналитическую параметризацию в окрестности точки $x = 0$.

Суммируя сказанное выше, мы приходим к выводу, что если выполнены предположения (2.2), то свободная граница аналитична, как только аналитично препятствие. Аналогично, если $\psi \in C^{m,\alpha}(\Omega)$, то Γ класса $C^{m-1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Приведенные здесь соображения применимы и к другим задачам. Эти вопросы будут обсуждаться в гл. VI.

Как мы видели, определенные предположения регулярности влекут за собой еще большую регулярность Γ. Но условия (2.2) не всегда выполняются. Например, ∂I может иметь острия; такой пример встретится в § 4. Некоторые предварительные итоги недавних исследований по регулярности множества Γ будут подведены в гл. VI.

3. СВОБОДНАЯ ГРАНИЦА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Для двумерных задач гладкость свободной границы может быть определена методом, аналогичным методу аналитического продолжения, рассмотренному в § 1. Мы докажем здесь теорему, которая будет полезна в самых различных ситуациях. Она обобщает результаты § 1 в двух направлениях: во-первых, данные задачи и само уравнение не предполагаются аналитическими, а во-вторых, свободная граница не обязательно жорданова кривая. Эта теорема затем будет применена к задаче 1.1.

Рассмотрим сначала вопрос, связанный с продолжением конформного отображения. Всюду в этом параграфе ω обозначает ограниченную связную и односвязную область в плоскости $z = x_1 + ix_2$. Пусть $G = \{t = t_1 + it_2 \mid |t| < 1,\ \operatorname{Im} t > 0\}$ и

$$\varphi\colon\ G \to \omega \tag{3.1}$$

— конформное отображение G на ω. Тогда φ — аналитическая функция, ограниченная в $\bar{G}$, и, кроме того, площадь A области ω выражается формулой $A = \int\limits_G |\varphi'(t)|^2\, dt_1\, dt_2$. Поскольку ω ограничена, то $A < \infty$ и тем самым $\varphi \in H^1(\Omega)$. По теореме о следе (гл. II, приложение A) предел $\varphi(t_1) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(t_1 + i\varepsilon)$ существует для п. в. $-1 < t_1 < 1$ и $\varphi(t_1) \in L^2(-1, 1)$.

Положим

$$\gamma = \{z \in \partial\omega \mid \exists \text{ последовательность } \{t_n\} \subset G\colon$$
$$t_n \to t \in (-1, 1) \text{ и } z = \lim \varphi(t_n)\}. \tag{3.2}$$

Ясно, что γ компактно и содержит график функции $\varphi(t_1)$, $-1 < t_1 < 1$. Элементарно проверяется связность γ. Заметим, что если

γ — замкнутая жорданова дуга в $\partial\omega$, то существует конформное отображение φ области ω, для которого γ допускает представление (3.2) и при этом $\varphi \in C(G \cup (-1, 1))$.

Теорема 3.1. *Пусть функции $g \in H^{1,\infty}(\omega)$ и $\alpha \in C^{0,\lambda}(U)$, где U — окрестность $\bar{\omega}$, а $0 < \lambda < 1$, таковы, что*

$$g_{\bar{z}} = \alpha \quad \text{в } \omega, \tag{3.3}$$

$$g(z) = 0 \quad \forall z \in \gamma \subset \partial\omega, \tag{3.4}$$

$$|\alpha(z)| \geqslant \alpha_0 > 0 \quad \forall z \in U.$$

Пусть, далее, φ — конформное отображение G на ω и $\gamma \subset \partial\omega$ допускает представление (3.2). Тогда $\varphi \in C^{1,\tau}(\bar{G} \cap B_R)$ для всех $\tau < \lambda$ и $R < 1$.

Для пояснения условий теоремы рассмотрим решение u вариационного неравенства (1.1) для случая $N = 2$ и положим

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z}(u(z) - \psi(z)), \quad z \in \Omega,$$

$$\text{где} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Согласно теореме 6.3 гл. IV, функция g липшицева на компактных подмножествах Ω, когда $\psi \in C^2(\Omega)$. Поскольку

$$g_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{4}\Delta(u - \psi) = -\frac{1}{4}\Delta\psi \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I,$$

то, если функция $\psi \in C^{2,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, и имеет ненулевой лапласиан, в $\Omega \setminus I$ выполнены предположения теоремы. Условия, которые обеспечивают подходящий выбор $\gamma \subset \partial I$, будут обсуждены в дальнейшем.

Прежде всего мы покажем, что φ' обладает нужными свойствами суммируемости, и затем продолжим φ до функции, дифференцируемой в указанной точке оси t_1.

Пусть $z_0 \in \gamma$. Фиксируем решение $g^*(z) = g^*(z, z_0)$ уравнения $\partial g^*/\partial\bar{z} = \alpha$ в U, такое что

$$g^*(z_0) = g^*_z(z_0) = 0. \tag{3.5}$$

Тогда $g^* \in C^{1,\lambda}(U)$ и

$$g^*(z) = \alpha(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + R(z, z_0), \quad z \in U, \tag{3.6}$$

$$|z - z_0|^{-1}|R(z, z_0)| + |R_z(z, z_0)| + |R_{\bar{z}}(z, z_0)| \leqslant C|z - z_0|^{\lambda} \tag{3.7}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $z_0 \in \gamma$. Такое решение g^* нетрудно найти. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $\alpha \in C^{0,\lambda}(V)$ в некоторой окрестности V множества $\bar{U}$. Положим

$$A(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_V \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta_1\,d\zeta_2, \quad z \in U.$$

Ясно, что $A \in C^{1,\lambda}(\bar{U})$ и для любого $z_0 \in U$

$$A(z) = A(z_0) + A_z(z_0)(z - z_0) + \alpha(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + R(z, z_0), \quad z \in U,$$

где R удовлетворяет (3.7). Теперь мы можем взять

$$g^*(z) = A(z) - A(z_0) - A_z(z_0)(z - z_0).$$

Комплекснозначная функция $f \in H^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, называется *квазиконформной* в D, если $\sup\limits_D |f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)| = q < 1$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.1. *Тогда* φ *допускает квазиконформное продолжение в окрестность действительной оси и при этом*

$$\varphi \in H^{1,s}(G \cap B_R) \quad \forall 1 \leqslant s < \infty, \quad 0 < R < 1.$$

Доказательство. Достаточно проверить утверждение в некоторой точке $t_0 \in (-1, 1)$. Можно считать, что $t_0 = 0$ и предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi(i\varepsilon) = z_0$ существует.

Выберем $r > 0$ так, чтобы g^* (см. выше) удовлетворяло соотношению

$$\left| \frac{\partial g^*}{\partial z}(z) \Big/ \frac{\partial g^*}{\partial \bar{z}}(z) \right| < \varepsilon < 1 \quad \text{в} \quad B_r(z_0). \tag{3.8}$$

Это возможно согласно (3.5). Пусть $\zeta = g^*(z)$ — сужение отображения g^* на $B_r(z_0)$. Так как якобиан этого отображения

$$|Dg^*| = \frac{1}{2}\left(|g^*_{\bar{z}}|^2 - |g^*_z|^2\right) \geqslant (\alpha_0^2/2)(1 - \varepsilon^2) > 0 \quad \text{в} \quad B_r(z_0),$$

то существует окрестность $B_{r'}(z_0)$, где g^* является взаимно однозначным соответствием и имеет обратное отображение $(g^*)^{-1}$ класса $C^{1,\lambda}$. Предположим, что $B_r(z_0) \subset B_{r'}(z_0)$. Радиус r можно выбрать независимо от $z_0 \in \gamma$, если z_0 принадлежит компактному подмножеству в γ, содержащемуся в $\gamma \cap \varphi(\bar{G} \cap B_R)$, $R < 1$.

Разность $h(z) = g^*(z) - g(z)$, $z \in \omega \cup \gamma$, непрерывна в $\omega \cup \gamma$, аналитична в ω и

$$h(z) = g^*(z) \quad \forall z \in \gamma. \tag{3.9}$$

Кроме того, $h \in H^{1,\infty}(\omega)$, так как g^* и g обладают этим свойством.

Построим теперь продолжение φ. Пусть $\delta > 0$ столь мало, что $\varphi(B_\delta(0) \cap G) \subset B_r(z_0)$. Определим функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \operatorname{Im} t \geqslant 0, \\ g^{*-1}(h(\varphi(\bar{t}))), & \operatorname{Im} t < 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\Phi \in H^1(B_\delta(0))$. Действительно, φ — конформное отображение на область конечной площади, и потому $\varphi \in H^1(B_\delta(0) \cap G)$, как было отмечено в начале параграфа. Далее, $(g^*)^{-1}$ — гладкое отображение, а $h(\varphi(\bar{t}))$ — композиция липшицевой

функции с гладкой. Следовательно, $g^{*-1}(h(\varphi(t))) \in H^1(B_\delta(0) \cap \cap \{t \mid \operatorname{Im} t < 0\})$. Применим лемму об H^1-склейке. Для каждого $z \in \gamma$, для которого $|z - z_0|$ мало, $g^{*-1}(h(z)) = z$ согласно (3.9), и поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g^{*-1}(h(\varphi(t + i\varepsilon))) = \varphi(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(t + i\varepsilon) \quad \text{для п. в.} \quad -\delta < t < \delta.$$

Таким образом, следы Φ на действительной прямой сверху и снизу равны между собой. По лемме А.8 гл. II $\Phi \in H^1(B_\delta(0))$.

Проверим, что Φ — квазиконформное отображение. В самом деле, $\Phi_{\bar t}(t) = 0$, если $\operatorname{Im} t > 0$, $|t| < \delta$, и

$$|\Phi_{\bar t}(t)/\Phi_t(t)| = |g_{\bar z}^{*-1}/g_z^{*-1}| = |g_{\bar z}^*/g_z^*| < \varepsilon, \quad \operatorname{Im} t < 0, \quad |t| < \delta.$$

Отсюда следует (см. Берс и др. [1], с. 276), что $\Phi \in H^{1,s}(B_\eta(0))$, $\eta < \delta$, где $s = s(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon) = +\infty$. В частности, $\varphi \in H^{1,s}(G \cap B_{\delta/2}(0))$. ∎

Рассмотрим теперь функцию $w \in H^{1,s}(B)$, $B = \{t \mid |t| < 1\}$, такую что

$$|t|^{-\sigma} w_{\bar t} \in L^s(B), \quad \text{где } \sigma > 0, \quad s > 2, \text{ и } \sigma - (2/s) \geq \tau > 0. \tag{3.10}$$

Лемма 3.3. *Пусть w удовлетворяет условиям* (3.10). *Тогда существует такое комплексное число c, что*

$$\left|\frac{w(z) - w(0)}{z} - c\right| \leq C_R \left(\left\| t^{-\sigma} w_{\bar t} \right\|_{L^s(B)} + \| w \|_{L^\infty(B)}\right) |z|^{\min(1,\tau)}, \; z \in B_R, \; R < 1,$$

$$\text{и} \quad |c| \leq C'_R \left[\left\| t^{-\sigma} w_{\bar t} \right\|_{L^s(B)} + \| w \|_{L^\infty(B)}\right],$$

где константы C_R и C'_R зависят от R, s, τ.

Хотя эта лемма допускает прямое доказательство, условие (3.10) не вполне очевидно.

Доказательство. По лемме Соболева $w \in C^{0,\lambda}(B)$, $\lambda = 1 - (2/s)$. Теперь напомним формулу Грина в комплексной форме. Пусть $g = u + iv$ и $dz = dx_1 + i dx_2$. Для каждого множества $E \subset B_1$ с гладкой границей ∂E и функции $g \in H^{1,s}(E)$ справедливо равенство

$$\int_E g_{\bar z}\, dx_1\, dx_2 = -\frac{i}{2} \int_{\partial E} g\, dz.$$

В частности, если ζ аналитична в окрестности E и $w \in H^{1,s}(B)$ — функция, определенная выше, то

$$\int_E w_{\bar t} \zeta\, dt_1\, dt_2 = -\frac{i}{2} \int_{\partial E} w \zeta\, dt.$$

Рассмотрим для фиксированной точки $z \in B$ функцию $\zeta(t) = 1/[t(t - z)]$ и множества $E_\varepsilon = \{t \mid |t| > \varepsilon, \; |t - z| > \varepsilon, \; |t| < R\}$. Подставим это в выражение выше. Тогда после интегрирования и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ (который существует вследствие непрерывности по

Гёльдеру w) получаем хорошо известную формулу

$$\frac{w(z)-w(0)}{z}=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{B}\frac{1}{t(t-z)}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1\,dt_2+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B}\frac{1}{t(t-z)}w(t)\,dt,\quad 0\neq z\in B. \tag{3.11}$$

Следовательно,

$$C=\frac{\partial w}{\partial z}(0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}[w(z)-w(0)]=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{B}t^{-2}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1dt_2+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B}t^{-2}w(t)\,dt.$$

Заметим, что ($1/s+1/s'=1$)

$$\left|\int\limits_{B}t^{-2}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1\,dt_2\right|\leqslant\|t^{-\sigma}w_{\bar{t}}\|_{L^s(B)}\left\{2\pi\int\limits_{0}^{1}|t|^{(\sigma-2)s'+1}\,d|t|\right\}^{1/s'},$$

и если $\sigma>2/s$, то $(\sigma-2)s'+1>-1$ и тем самым правая часть неравенства конечна. Положим

$$c=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{B}t^{-2}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1\,dt_2+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B}t^{2}w(t)\,dt;$$

вычитая эту величину из (3.11), придем к равенству

$$\frac{w(z)-w(0)}{z}-c=-\frac{z}{\pi}\int\limits_{B}\frac{1}{t^2(t-z)}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1\,dt_2+\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{\partial B}\frac{1}{t^2(t-z)}w(t)\,dt.$$

При $z\neq 0$

$$\left|\int\limits_{B}\frac{1}{t^2(t-z)}w_{\bar{t}}(t)\,dt_1\,dt_2\right|\leqslant\|t^{-\sigma}w_{\bar{t}}\|_{L^s(B)}\left\{\int\limits_{B}|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\,dt_1\,dt_2\right\}^{1/s'}.$$

Для оценки интеграла в фигурных скобках воспользуемся хорошо известным приемом. Ясно, что

$$\int\limits_{B}|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\,dt_1\,dt_2\leqslant\int\limits_{|t|<2}|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\,dt_1\,dt_2.$$

Пусть $|z|<1$. Рассмотрим множества

$$A_1=\left\{t\,\middle|\,|t-z|<\tfrac{1}{2}|z|\right\},\quad A_2=\left\{t\,\middle|\,|t|<\tfrac{3}{2}|z|,\ |t-z|\geqslant\tfrac{1}{2}|z|\right\},$$
$$A_3=\left\{t\,\middle|\,\tfrac{3}{2}|z|\leqslant|t|<2\right\}$$

и обозначим

$$I_j=\int\limits_{A_j}|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\,dt_1dt_2.$$

Предположим теперь, что $\sigma<2$. Тогда $|t|^{(\sigma-2)s'}\leqslant 2^{(2-\sigma)s'}|z|^{(\sigma-2)s'}$ в A_1, и, значит,

$$I_1\leqslant \text{const}\,|z|^{(\sigma-2)s'}\int\limits_0^{|z|/2}\rho^{1-s'}\,d\rho\leqslant \text{const}\,|z|^{(\sigma-2)s'+2-s'}.$$

Далее, $|t-z|^{-s'}\leqslant 2^{s'}|z|^{-s'}$ при $t\in A_2$. Это приводит к оценке

$$I_2\leqslant \text{const}\,|z|^{-s'}\int\limits_0^{3|z|/2}\rho^{(\sigma-2)s'+1}\,d\rho=\text{const}\,|z|^{(\sigma-2)s'+2-s'}.$$

Наконец, $|t/(t-z)|\leqslant|t|/(|t|-|z|)\leqslant 3$, если $t\in A_3$, и поэтому $|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\leqslant 3^{s'}|t|^{(\sigma-2)s'-s'}$. Следовательно,

$$I_3\leqslant \text{const}\int\limits_{3|z|/2}^{2}\rho^{(\sigma-2)s'-s'+1}\,d\rho\leqslant \text{const}\,[|z|^{(\sigma-2)s'-s'+2}-$$
$$-2^{(\sigma-2)s'-s'+2}]\leqslant \text{const}\,|z|^{(\sigma-2)s'-s'+2},$$

так как $(\sigma-2)s'-s'+2=s'[\sigma-3+(2/s')]<0$, если $\sigma<2$. Таким образом,

$$(I_1+I_2+I_3)^{1/s'}\leqslant \text{const}\,|z|^{\sigma-(2/s)-1}=\text{const}\,|z|^{\tau-1},\qquad |z|<1,$$

или

$$\left|\frac{z}{\pi}\int\limits_B\frac{1}{t^2(t-z)}\,w_{\bar t}(t)\,dt_1\,dt_2\right|\leqslant \text{const}\,|z|^{\tau},\qquad |z|<1.$$

Второй интеграл (участвующий в определении константы c) оценивается совсем просто, и тем самым лемма доказана для случая $\sigma<2$. Но если $\sigma\geqslant 2$, то

$$\left|\int\limits_B|t|^{(\sigma-2)s'}|t-z|^{-s'}\,dt_1\,dt_2\right|\leqslant \text{const}\int\limits_0^2\rho^{1-s'}\,d\rho<\infty,$$

и утверждение леммы справедливо (с показателем 1). ∎

Доказательство теоремы. Покажем, что функция φ (про которую уже известно, что она принадлежит $H^{1,s}(G\cap B_R)$, $0<R<1$) допускает продолжение до функции на B_R, удовлетворяющей условиям (3.10). После необходимой замены переменных можно считать, что $\varphi\in H^{1,s}(G)$. Построим продолжение в точке $t=0$. В остальных точках интервала $(-1,\ 1)$ это делается аналогично.

Вспомним про функцию $g^*(z)$ и разность $h(z)=g^*(z)-g(z)$, которая аналитична в ω и удовлетворяет условию

$$h(z)=g^*(z),\qquad z\in\gamma. \tag{3.9}$$

Запишем g^* в виде $g^*(z)=\alpha(z_0)(\bar z-\bar z_0)+R(z,\ \bar z)$ и определим φ^* соотношением

$$h(\varphi(t))=\alpha(z_0)[\varphi^*(t)-\bar z_0]+R(\varphi(t),\ \overline{\varphi(t)}).$$

Из (3.9) и (3.6) следует, что $\varphi^*(t)=\overline{\varphi(\bar{t})}$, если $\operatorname{Im} t=0$, $|t|<1$. Так как $h(\varphi(t))$ голоморфна в G, то

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\bar{t}}(t)=-\frac{1}{\alpha(z_0)}\frac{\partial R}{\partial\bar{z}}(\varphi(t),\ \overline{\varphi(\bar{t})})\,\overline{\varphi'(\bar{t})}$$

и тем самым вследствие (3.7)

$$\left|\frac{\partial\varphi^*}{\partial\bar{t}}(t)\right|\leqslant \text{const}\,|\varphi'(t)|\,|\varphi(t)-z_0|^{\lambda},\quad t\in G. \tag{3.12}$$

По лемме 3.2 $\varphi'\in L^s(G)$ для каждого s, $1\leqslant s<\infty$, и поэтому при данном τ, $0<\tau\leqslant\lambda$, мы можем взять s столь большим, чтобы $\sigma-(2/s)\geqslant\tau>0$ для $\sigma=\lambda[1-(2/s)]$. Далее, $\varphi^*_{\bar{t}}\in L^s(G)$, так что $\varphi^*\in H^{1,s}(G)$. Определим функцию

$$w(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \operatorname{Im} t\geqslant 0,\quad |t|<1,\\ \overline{\varphi^*(\bar{t})}, & \operatorname{Im} t\leqslant 0,\quad |t|<1.\end{cases} \tag{3.13}$$

Поскольку w непрерывна при $|t|<1$, то $w\in H^{1,s}(B)$ по лемме А.8 гл. II (в H^1 или $H^{1,s}$), а согласно (3.12), w удовлетворяет условиям (3.10). Следовательно, можно применить лемму 3.3 и получить существование константы c, такой что

$$\left|\frac{w(t)-w(0)}{t}-c\right|\leqslant \text{const}\,|t|^{\tau},\quad |t|<R<1.$$

Если $\operatorname{Im} t\geqslant 0$, то $w(t)=\varphi(t)$ и мы имеем оценку

$$\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}-c\right|\leqslant \text{const}\,|t|^{\tau},\quad |t|\leqslant R<1.$$

Вместо точки 0 можно было брать любую точку из $(-1,\ 1)$, и поэтому на самом деле доказано, что для каждой точки $t_0\in[-R,\ R]$, $R<1$, найдется такое комплексное число $c(t_0)$, что

$$\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}-c(t_0)\right|\leqslant C_R\,|t-t_0|^{\tau},\quad |c(t_0)|\leqslant C'_R, \tag{3.14}$$

где C_R, C'_R зависят от R, τ, s и от некоторых норм функции φ. Легко проверить с помощью теоремы Коши, что φ аналитична в G, и, поскольку она удовлетворяет условиям (3.14) для всех $R<1$, она принадлежит $C^{1,\tau}(\bar{G}\cap B_R)$, $R<1$. ∎

Применим доказанную теорему к случаю, когда препятствие вогнуто.

Теорема 3.4. *Пусть Ω — строго выпуклая область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и $\psi\in C^{2,\lambda}(\bar{\Omega})$ — строго вогнутое препятствие, т. е.* $\max\limits_{\Omega}\psi>0$, $\psi<0$ *на* $\partial\Omega$ *и*

$$-\psi_{x_ix_j}(z)\,\xi_i\xi_j>0\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^2,\quad \xi\neq(0,\ 0),\quad z\in\Omega.$$

Пусть

$$u \in K: \quad \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega\},$$

$$I = \{z \in \Omega \mid u(z) = \psi(z)\}.$$

Тогда $\Gamma = \partial I$ *— жорданова кривая, допускающая* $C^{1,\tau}$*-параметризацию.*

Доказательство. Топологическая природа множества I будет обсуждаться в § 6. Допустим здесь, что справедливы утверждения теоремы 6.2, а именно I — связная и односвязная область со связной внутренностью $\operatorname{int} I$. Пусть, кроме того, $\Omega \setminus I$ гомеоморфна кольцу. Отсюда следует существование конформного отображения φ верхней полуплоскости $t = t_1 + it_2$ с удаленным из нее диском на $\Omega \setminus I$, которое переводит $[-\infty, \infty]$ на ∂I. Это значит, что $\partial I = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \exists$ последовательность $\{t_n\} \subset \{t \mid \operatorname{Im} t > 0\}$: $\varphi(t_n) \to z$ и $\operatorname{Im} t_n \to 0\}$. Для некоторого заданного z_0, для которого $\varphi(t_n) \to z_0$, можно допустить, что $|t_n| < 1$.

Применим теорему 3.1 к $\omega = \varphi(G)$. Множество γ определено в (3.2), $g(z) = \frac{\partial}{\partial z}[u(z) - \psi(z)]$ и $\alpha(z) = -\frac{1}{4}\Delta\psi(z)$. Функция g липшицева в окрестности I, так как в ней ограничена вторая производная u (см. теорему 6.3 гл. IV). Из строгой вогнутости ψ следует, что $|\alpha(z)| \neq 0$ на компактных подмножествах Ω.

Таким образом, ∂I допускает параметризацию $t \to \varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, класса $C^{1,\tau}$, и тем самым ∂I — это некоторая кривая. Пусть она имеет двойную точку, т. е. $\varphi(t_1) = z_0 = \varphi(t_2)$ и $t_1 < t_2$. Тогда либо $C_1 = \{\varphi(t) \mid t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ или $C_2 = \{\varphi(t) \mid -\infty < t \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant t < \infty\}$ разбивает множество $\operatorname{int} I$, либо одно из множеств C_1 или C_2 не является границей открытого множества. Первый случай противоречит тому, что $\operatorname{int} I$ связно, а второй — тому, что $I = \overline{\operatorname{int} I}$, так как нашлась бы точка из C_1, которая не была бы пределом внутренних точек I. Следовательно, ∂I не имеет двойных точек, и, значит, это жорданова кривая. ∎

Заметим, что в последнем рассуждении используется лишь непрерывность параметризации, а не ее гладкость.

Отметим также, что на самом деле можно установить и «регулярность» кривой ∂I, т. е. отсутствие у нее особенностей типа острия (по крайней мере если $\psi \in C^{3,\lambda}(\Omega)$). Это требует более глубокого изучения продолжения w, определенного соотношением (3.13). В самом деле, w удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$|w_z(z)| \leqslant q(z) \sup_{|t|=|z|} |w(t) - w(0)|, \quad z \in B, \tag{3.15}$$

где $q \in L^s(B)$ для некоторого $s > 2$. Такие функции обладают рядом свойств, которые присущи аналитическим функциям. Дадим здесь

(без доказательства) описание этих свойств.

Теорема 3.5. *Пусть* w *удовлетворяет* (3.15). *Тогда если*

$$\lim_{z\to 0}|z^{-n}[w(z)-w(0)]|=0$$

для некоторого целого $n\geqslant 0$, *то существует предел*

$$c=\lim_{z\to 0} z^{-n-1}[w(z)-w(0)].$$

Кроме того, если $\lim\limits_{z\to 0} z^{-n}w(z)=0$ *для каждого* $n\geqslant 0$, *то* $w(z)\equiv 0$ *в окрестности* $z=0$.

Согласно теореме 3.4, сужение w на полуплоскость, где $\operatorname{Im} t>0$, есть нетривиальное конформное отображение. Следовательно, найдется наименьшее целое n, для которого

$$\lim_{z\to 0}\frac{w(z)-w(0)}{z^n}=c\neq 0.$$

Теперь из того, что конформное отображение взаимно однозначно, вытекает, что $n=1$ или 2.

Представляется естественным вопрос об условиях, гарантирующих более высокую дифференцируемость кривой γ. В этой связи мы сформулируем один результат, доказательство которого оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.1 *и* $\alpha\in C^{m,\lambda}(U)$, $m\geqslant 0$, $0<\lambda<1$. *Тогда конформное отображение* $\varphi\in C^{m+1,\tau}(\bar G\cap B_R)$ *для каждых* $\tau<\lambda$ *и* $R<1$.

Это несколько более сильное утверждение, чем то, которое получено с помощью преобразования Лежандра, поскольку здесь не требуется регулярности кривой ∂I.

4. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КРИВЫХ

Теоремы 3.1 и 3.5 показывают, что единственные особенности, которые может иметь кривая γ, — это особенности типа острия. Покажем на простом примере, что такие особенности действительно могут возникать. Рассмотрим функцию $z=\varphi(t)=t^2+it^\mu$, μ нечетно, отображающую

$$G=\{t=t_1+it_2\,|\,|t|<1,\ \operatorname{Im} t>0\}$$

на область $\omega=\varphi(G)$ в плоскости $z=x_1+ix_2$. Эта функция переводит $(-1,\ 1)$ на кривую

$$\Gamma:\quad x_2=\pm x_1^{\mu/2},\quad 0\leqslant x_1<1.$$

Построим для достаточно малого $\varepsilon>0$ функцию

$$u\in H^{2,\infty}(B_\varepsilon),\quad B_\varepsilon=\{z\,|\,|z|<\varepsilon\},$$

такую что

$$\begin{aligned} &\Delta u = 2 \quad \text{и} \quad u > 0 \quad \text{в} \quad \omega \cap B_\varepsilon, \\ &u = 0 \quad \text{и} \quad u_{x_j} = 0 \quad \text{в} \quad B_\varepsilon \setminus \omega, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \tag{4.1}$$

при этом $\mu = 4k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда следует, что

$$\int_{B_\varepsilon} u_{x_j} (v - u)_{x_j} \, dx \geqslant -2 \int_{B_\varepsilon} (v - u) \, dx \quad \forall v \in K, \tag{4.2}$$

$$\text{где} \quad K = \{v \in H^1(B_\varepsilon) \mid v \geqslant 0 \quad \text{и} \quad v = u \quad \text{на} \quad \partial B_\varepsilon\}.$$

Согласно (4.1), коинцидентное множество $I = \{z \mid u(z) = 0\}$ функции u будет иметь свободную границу $\Gamma \cap B_\varepsilon$ в B_ε.

То, что Γ допускает аналитическую параметризацию (как граничное значение конформного отображения), означает существование такой голоморфной функции $f(z)$, $z \in \omega$, что $f(z) = \bar{z}$, $z \in \gamma$. Действительно, эту функцию можно выписать в явном виде:

$$f(z) = F(t) = t^2 - it^\mu, \quad t \in G.$$

Для изучения ее поведения найдем z как функцию t. Ясно, что

$$t^2 = z - iz^{\mu/2} + \ldots, \quad 0 \leqslant \arg z^{1/2} \leqslant \pi,$$

где ... обозначает члены, показатели степени которых больше чем $\mu/2$. Таким образом, $F(t) = t^2 - it^\mu = -z + 2t^2$ и

$$f(z) = z - 2iz^{\mu/2} + \ldots, \quad z \in \omega, \quad |z| \text{ мало}.$$

Функцию u определим следующим образом:

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}|z|^2 - \operatorname{Re} \int\limits_0^z f(\zeta) \, d\zeta, & z \in \omega, \\ 0, & z \in B_\varepsilon \setminus \omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Так как $f(z) = \bar{z}$ на Γ, то

$$u(z) = u_{x_j}(z) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, 2.$$

Определенная соотношением (4.3) функция u допускает разложение

$$u(z) = x_2^2 - \frac{2}{1 + (\mu/2)} \rho^{(\mu/2)+1} \sin\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)\theta + \ldots, \; z \in \omega, \; |z| \text{ мало}, \tag{4.4}$$

откуда видно, что $u(x_1) > 0$ при $x_1 < 0$, если $\mu = 4k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для завершения доказательства того, что u удовлетворяет (4.1), осталось показать, что $u > 0$ в $\omega \cap B_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Поскольку $(\mu/2) + 1 \geqslant 5/2$, то

$$u_{x_2 x_2}(z) = \begin{cases} 2 + O(|z|^{1/2}), & \text{если} \quad z \in \omega \cap B_\varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad z \in \omega \setminus B_\varepsilon, \end{cases}$$

а также $u_{x_2}(z) = -u_{x_2}(\bar{z})$, $z \in B_\varepsilon$, $u(z) = u(\bar{z})$, $z \in B_\varepsilon$.

На каждой вертикальной прямой $x_1=\delta$, $|\delta|<\varepsilon$, $u(\delta+ix_2)$ — выпуклая функция класса $C^{1,1}$. Ее минимум достигается в точке, где $u_{x_2}(\delta+ix_2)=0$. Если $\delta<0$, то единственной такой точкой является точка $x_2=0$, и мы видели, что $u(x_1)>0$, если $x_1<0$. Пусть $\delta>0$. Тогда $u(\delta+ix_2)=u_{x_2}(\delta+ix_2)=0$ при $|x_2|\leqslant\delta^{\mu/2}$, в то время как $u_{x_2x_2}(\delta+ix_2)>0$ при $|x_2|>\delta^{\mu/2}$. Следовательно, u строго возрастает, когда $|x_2|>\delta^{\mu/2}$, и тем самым положительна при этих значениях.

5. ЗАДАЧА С ПРЕПЯТСТВИЕМ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Начнем с рассмотрения геометрических свойств двумерной минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$ (для задачи в непараметрической форме). Пусть функция $u\in C^2(U)$, где $U\subset\mathbb{R}^2$ — открытое множество, есть решение уравнения минимальной поверхности в U, т. е.

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_{x_j}}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)=0 \quad \text{в} \quad U. \tag{5.1}$$

Ее график

$$S=\{x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\mid x_3=u(z),\quad z=x_1+ix_2\in U\}$$

называется минимальной поверхностью. Величина

$$H=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v_{x_j}}{\sqrt{1+v_x^2}}\right)$$

(для $v\in C^2(U)$) называется средней кривизной поверхности, определяемой функцией v. Уравнение (5.1) есть уравнение Эйлера для функционала площади (в непараметрической форме)

$$F(v)=\int_U\sqrt{1+v_x^2}\,dx.$$

Таким образом, из сопоставления формул получается, что поверхность, на которой достигается минимум площади среди всех поверхностей с данными граничными значениями, имеет нулевую среднюю кривизну.

Метрика поверхности $M=\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_3=v(z),\ z\in U\}$ задается симметричной положительно определенной матрицей

$$g=(g_{ij})=\begin{pmatrix}1+v_{x_1}^2 & v_{x_1}v_{x_2}\\ v_{x_1}v_{x_2} & 1+v_{x_2}^2\end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Каждой точке $x\in M$ сопоставим вектор $n(x)\in S^2$ внешней нормали к M в точке x,

$$n(x)=(-v_{x_1}/W,\ -v_{x_2}/W,\ 1/W),\quad W=\sqrt{1+v_x^2}.$$

Это отображение индуцирует другую (возможно, вырожденную) метрику на M, задаваемую матрицей

$$l=(l_{ij})=\begin{pmatrix}n_{x_1}\cdot n_{x_1} & n_{x_1}\cdot n_{x_2}\\ n_{x_1}\cdot n_{x_2} & n_{x_2}\cdot n_{x_2}\end{pmatrix}.$$

Матрица l симметрична и неотрицательна. Минимальная поверхность S обладает тем свойством, что матрицы g и l в каждой точке пропорциональны. Данное утверждение означает, что нормальное отображение S в сферу S^2 конформно или антиконформно в зависимости от того, положительна или отрицательна функция пропорциональности. Далее этот факт будет доказан.

Заменяя точку $(c_1, c_2, c_3) \in S^2$ ее стереографической проекцией на экваториальную плоскость из южного полюса,

$$\zeta = -(c_1 - ic_2)/(1 + c_3),$$

и применяя это к $n(x)$, получаем гауссово отображение поверхности S (минимальна она или нет)

$$f(z) = \frac{u_{x_1}(z) - iu_{x_2}(z)}{1 + \sqrt{1 + u_x(z)^2}}, \quad z \in U. \tag{5.3}$$

Вследствие того что стереографическая проекция $S^2 \to \mathbb{C}$ индуцирует метрику на S^2, пропорциональную исходной, нужно только показать, что $|d\zeta|^2$, $\zeta = f(z)$, пропорционально метрике, определяемой g.

Лемма 5.1. *Пусть $U \in \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $u \in C^2(U)$ — решение уравнения минимальной поверхности. Тогда*

$$f_{\bar z}(z) = \mu(z) f_z(z), \quad z \in U,$$

$$\textit{где} \quad \mu(z) = \overline{f(z)^2}.$$

Эта лемма доказывается непосредственно, но требует длинных вычислений. Более геометрическое доказательство содержится в работе Киндерлерера [3].

Матрица g порождает квадратичную форму

$$g = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2.$$

Обозначая $dz = dx_1 + i\, dx_2$ и $d\bar z = dx_1 - i\, dx_2$, получим

$$g = \tfrac{1}{4}\left[(g_{11} - g_{22} - 2ig_{12})\, dz^2 + 2(g_{11} + g_{22})\, dz\, d\bar z + (g_{11} - g_{22} + 2ig_{12})\, d\bar z^2\right].$$

Далее,

$$|d\zeta|^2 = |f_z\, dz + f_{\bar z}\, d\bar z|^2 = |f_z|^2\, |dz + \mu\, d\bar z|^2 =$$
$$= |f_z|^2 (\bar\mu\, dz^2 + (1 + |\mu|^2)\, dz\, d\bar z + \mu\, d\bar z^2).$$

Заметим, что $\mu = \dfrac{g_{11} - g_{22} + 2ig_{12}}{(1+W)^2}$, $W = \sqrt{1 + u_x^2}$, и $1 + |\mu|^2 = \dfrac{2(g_{11} + g_{22})}{(1+W)^2}$. Следовательно,

$$|d\zeta|^2 = [|f_z|^2/(1 + W)^2]\, g.$$

Таким образом, мы доказали

Предложение 5.2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество и $u \in C^2(U)$ — решение уравнения минимальной поверхности. Тогда гаус-*

сово отображение поверхности

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = u(z), \quad z \in U\}$$

конформно.

Приведенные выше рассмотрения наталкивают на мысль, что можно использовать гауссово отображение поверхности S в плоскость (скажем, комплексного градиента u) с целью установления гладкости свободной границы. Напомним сначала теорему Корна и Лихтенштейна (см. Курант и Гильберт [1]).

Теорема 5.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область с гладкой границей, $B = \{\zeta \mid |\zeta| < 1\}$ и функция $\mu \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию*

$$|\mu(z)| \leqslant \mu_0 < 1 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Тогда существует гомеоморфизм $\zeta = h(z)$ из $\bar{\Omega}$ в $\bar{B}$, такой что $h \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $h_{\bar{z}} = \mu h_z$ в Ω, $|h_z| > 0$ в Ω и $h(z_0) = 0$ в заранее заданной точке $z_0 \in \Omega$. Если для $f \in C^1(U)$, где $U \subset \Omega$ открыто, выполняется соотношение

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z \quad \text{в} \quad \Omega,$$

то $F(\zeta) = f(z)$ — голоморфная функция от ζ в $h(U)$.

Второе утверждение теоремы элементарно проверяется. Действительно,

$$f_z = F_\zeta h_z + F_{\bar{\zeta}}(\bar{h})_z, \qquad f_{\bar{z}} = F_\zeta h_{\bar{z}} + F_{\bar{\zeta}}(\bar{h})_{\bar{z}},$$

и поэтому

$$0 = \mu f_z - f_{\bar{z}} = F_\zeta(\mu h_z - h_{\bar{z}}) + F_{\bar{\zeta}}(\mu \bar{h}_{\bar{z}} - \bar{h}_z) = F_{\bar{\zeta}}(|\mu|^2 - 1)\bar{h}_z.$$

Так как $|\mu| < 1$ и $h_z \neq 0$, то $F_{\bar{\zeta}} = 0$ и тем самым F — голоморфная функция.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — строго выпуклая область с гладкой границей $\partial\Omega$ и $\psi \in C^{2,\lambda}(\Omega)$ — строго вогнутое препятствие. Рассмотрим задачу: найти

$$u \in K: \quad \int_\Omega \frac{u_{x_j}}{\sqrt{1+u_x^2}}(v-u)_{x_j}\,dx \geqslant 0 \tag{5.4}$$

для всех $v \in K$, где $K = \{v \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega\}$.

Положим $I = \{z \in \Omega \mid u(z) = \psi(z)\}$. Мы знаем, что такая функция u существует и, кроме того, $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap H^{2,\infty}(\Omega_0)$ для каждых $\alpha \in (0, 1)$ и $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Теорема 5.4. *Пусть $I = I(u)$ — коинцидентное множество решения u задачи (5.4). Тогда ∂I — жорданова кривая, допускающая $C^{1,\tau}$-параметризацию для всех $\tau < \lambda$.*

Доказательство. В процессе доказательства мы воспользуемся теоремой 6.2, так же как это было сделано при доказательстве теоремы 3.4.

Определим гауссово отображение $f(z)$, $z \in \Omega$, по формуле (5.3). Тогда f — липшицева функция на компактных подмножествах Ω, удовлетворяющая уравнению

$$f_{\bar z} = \mu f_z \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I,$$
$$\mu = \bar f^2$$

в силу леммы 5.1, так как $-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{u_{x_j}}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) = 0$ в $\Omega \setminus I$. Кроме того, если положить

$$f^*(z) = \frac{\psi_{x_1}(z) - i\psi_{x_2}(z)}{1+\sqrt{1+\psi_x(z)^2}}, \quad z \in \Omega, \tag{5.5}$$

то $f^* \in C^{1,\lambda}(\Omega)$ и при этом $f^*(z) = f(z)$ в I, поскольку $u_{x_j}(z) = \psi_{x_j}(z)$ в I.

Лемма 5.5. *Пусть функция* f^* *определена по формуле* (5.5). *Тогда* $|f^*_z(z)| < |f^*_{\bar z}(z)|$ *для* $z \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Omega$. После соответствующей замены переменных (модули величин f^*_z и $f^*_{\bar z}$ при этом остаются прежними) можно считать, что $\psi_{x_1x_2}(z_0) = 0$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$f^*_z = \psi_{x_1x_1}\alpha_1 - \psi_{x_2x_2}\alpha_2 + ib,$$
$$f^*_{\bar z} = \psi_{x_1x_1}\alpha_1 + \psi_{x_2x_2}\alpha_2 - ib,$$

где $\alpha_j > 0$ и b — действительные числа. Так как ψ — вогнутая функция, то $\psi_{x_jx_j} < 0$ и, следовательно, $|\operatorname{Re} f^*_z| < |\operatorname{Re} f^*_{\bar z}|$. Вследствие того что $|\operatorname{Im} f^*_z| = |\operatorname{Im} f^*_{\bar z}|$, приходим к утверждению леммы.

Для завершения доказательства теоремы построим отображение Ω на B в соответствии с теоремой Корна и Лихтенштейна (теорема 5.3) с коэффициентом $\mu = \bar f^2$. Точнее, пусть $\zeta = h(z)$ удовлетворяет условию

$$h_{\bar z} = \mu h_z, \quad z \in \Omega, \quad \text{и} \quad \mu = \bar f^2, \tag{5.6}$$

и пусть $h(z_0) = 0$ в заранее фиксированной точке $z_0 \in \partial I$. Определим функции

$$F^*(\zeta) = f^*(z) \quad \text{и} \quad F(\zeta) = f(z)$$

и положим

$$g(\zeta) = F^*(\zeta) - F(\zeta), \quad \zeta \in B.$$

Функция g липшицева в окрестности $h(I)$. Вследствие голоморфности $F(\zeta)$ в $B \setminus h(I)$ имеем

$$g_{\bar\zeta}(\zeta) = F^*_{\bar\zeta}(\zeta) = f^*_z \frac{\partial h^{-1}}{\partial \bar\zeta} + f^*_{\bar z} \frac{\partial (\bar h)^{-1}}{\partial \bar\zeta} = \alpha(\zeta) \text{ в } B \setminus h(I). \tag{5.7}$$

Поскольку отображение h и его обратное h^{-1} класса $C^{1,\lambda}$ и $f^* \in C^{1,\lambda}(\Omega)$, то $\alpha \in C^{0,\lambda}(B)$. Мы должны проверить, что $|\alpha(\zeta)| \neq 0$. Из (5.6) немедленно следует соотношение $\partial h^{-1}/\partial\bar{\zeta} = a\mu\, \partial h^{-1}/\partial\zeta$, где $|a| = 1$. Учитывая, что $\partial h^{-1}/\partial\zeta \neq 0$, $|\mu| < 1$, и используя предыдущую лемму, получаем

$$|\alpha(\zeta)| = |\partial h^{-1}/\partial\zeta|\,|f_z^*\mu a + f_{\bar{z}}^*| \geqslant |\partial h^{-1}/\partial\zeta|\,(|f_{\bar{z}}^*| - |\mu|\,|f_z^*|) > 0.$$

Применим теперь теорему 3.1. Предполагая выполненной теорему 6.2, рассуждаем так же, как и при доказательстве теоремы 3.4. Пусть $\zeta_0 \in \partial I$. Рассмотрим конформное отображение φ верхней полуплоскости с выкинутым диском на $B \setminus h(I)$ (топологический образ $\Omega \setminus I$), которое переводит действительную ось $(-\infty, \infty)$ на $\partial h(I)$ (точный смысл этого обеспечен в (3.1)—(3.2)). Пусть $\varphi(0) = 0$. По теореме 3.1 $\varphi \in C^{1,\tau}(-\infty, \infty)$ для каждого $\tau < \lambda$ и $t \to h^{1,\tau}(\varphi(t))$ есть $C^{1,\tau}$-параметризация ∂I.

Далее точно так же, как и в теореме 3.4, доказывается, что ∂I — жорданова дуга. ∎

Используя этот результат, можно дать непосредственное доказательство аналитичности ∂I, когда функция ψ вогнута и аналитична. (Исторически именно это применение стимулировало разработку значительной части материала § 5.) Доказательство опирается на разрешимость системы дифференциальных уравнений в области комплексной плоскости и использование аналитического продолжения конформного представления минимальной поверхности $S = \{x \mid x_3 = u(z),\ z \in \Omega \setminus I\}$. Идея связи аналитической функции с ее возможными продолжениями посредством дифференциального уравнения принадлежит Леви [2, 4]. Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 5.6. *Пусть $I = I(u)$ — коинцидентное множество решения и задачи* (5.4), *и пусть, кроме того, ψ вещественно аналитична. Тогда ∂I — жорданова дуга, допускающая аналитическую параметризацию.*

6. ТОПОЛОГИЯ КОИНЦИДЕНТНОГО МНОЖЕСТВА В СЛУЧАЕ, КОГДА ПРЕПЯТСТВИЕ ВОГНУТО

Если препятствие ψ и область Ω произвольны, то топологическая структура коинцидентного множества решения задачи (1.1) может оказаться слишком сложной. В упражнениях мы показываем, что для любого числа k найдется такое препятствие, что соответствующее коинцидентное множество имеет по крайней мере k компонент. Однако если препятствие строго вогнуто, а область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ строго выпукла, то можно доказать, что I — односвязная область, совпадающая с замыканием своей внутренности. Этот факт уже был использован при доказательстве теорем 3.4 и 5.4.

Всюду в этом параграфе предполагается, что

$$\begin{gathered}\Omega \text{ — строго выпуклая область с гладкой} \\ \text{границей в плоскости } z = x_1 + ix_2,\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered}\psi \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ — строго вогнутое препятствие, т. е.} \\ -\psi_{x_j x_k}(z)\,\xi_j\xi_k > 0 \text{ для } (0,\ 0) \neq (\xi_1,\ \xi_2) \in \mathbb{R}^2,\ z \in \bar{\Omega},\end{gathered} \tag{6.1'}$$

$$\begin{gathered}a(p) = (a_1(p),\ a_2(p)) \text{ — локально коэрцитивное} \\ \text{аналитическое векторное поле.}\end{gathered} \tag{6.1''}$$

Пусть

$$u \in K: \quad \int\limits_{\Omega} a_j(u_x)(v-u)_{x_j}\,dx \geqslant 0 \qquad \forall v \in K, \tag{6.2}$$

$$K = \left\{v \in H_0^{1,\infty}(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega\right\},$$

$$I = \{z \in \Omega \mid u(z) = \psi(z)\},$$

где I — коинцидентное множество решения u вариационного неравенства (6.2). Это решение u существует, единственно и

$$u \in H^{2,s}(\Omega) \cap H^{2,\infty}(\Omega_0) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant s < \infty$$

и всех подобластей $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$. Так как $\psi < 0$ на $\partial\Omega$, то I — компактное подмножество Ω (гл. IV, теоремы 4.3 и 6.3).

Как обычно, мы определяем оператор A: $H_0^{1,\infty}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, полагая

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v_x), \quad v \in H_0^{1,\infty}(\Omega).$$

Вогнутость ψ означает, что $A\psi > 0$ в Ω. Действительно,

$$A\psi = -\frac{\partial}{\partial x_j} a_j(\psi_x(z)) = -\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(\psi_x(z))\,\psi_{x_k x_j}(z) = -\operatorname{Tr}\alpha\Psi,$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial p_1}(\psi_x(z)) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_1}{\partial p_2}(\psi_x(z)) + \dfrac{\partial a_2}{\partial p_1}(\psi_x(z))\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_1}{\partial p_2}(\psi_x(z)) + \dfrac{\partial a_2}{\partial p_1}(\psi_x(z))\right) & \dfrac{\partial a_2}{\partial p_2}(\psi_x(z)) \end{pmatrix}$$

$$\text{и} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{x_1x_1}(z) & \psi_{x_1x_2}(z) \\ \psi_{x_1x_2}(z) & \psi_{x_2x_2}(z) \end{pmatrix}.$$

Так как α — положительно определенная симметричная матрица, а Ψ — отрицательно определенная симметричная матрица, то $-\operatorname{Tr}\alpha\Psi > 0$.

Лемма 6.1. *Множество $\Omega \setminus I$ связно.*

Доказательство. Поскольку $u(z) = 0 > \psi(z)$ для $z \in \partial\Omega$ и $\partial\Omega$ связно, то существует только одна компонента $\Omega \setminus I$, замыкание

которой пересекает $\partial\Omega$. Предположим, что ω' — другая компонента $\Omega\diagdown I$. Тогда $\partial\omega'\subset I$. Для любого $\zeta\in C_0^\infty(\omega')$, $\zeta\geqslant 0$,

$$0\leqslant\int\limits_{\omega'}[a_j(\psi_x)-a_j(u_x)]\,\zeta_{x_j}\,dx=\int\limits_{\omega'}\alpha_{jk}(\psi-u)_{x_k}\zeta_{x_j}\,dx,$$

$$\text{где}\quad \alpha_{jk}(z)=\int\limits_0^1\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(u_x(z)+t\,(\psi_x(z)-u_x(z)))\,dt.$$

Это положительно определенная форма вследствие локальной коэрцитивности a. Следовательно, $\psi-u$ есть суперрешение эллиптического уравнения и, значит,

$$\psi(z)-u(z)\geqslant\inf_{\partial\omega'}(\psi-u),\qquad z\in\omega'.$$

Но $\partial\omega'\subset I$, и поэтому $\psi-u\geqslant 0$ в ω'. Мы пришли к противоречию с тем, что $\omega'\subset\Omega\diagdown I$. ∎

Рассмотрим здесь решение v уравнения

$$Av(z)=0\quad\text{в}\quad B_r(z_0),\qquad z_0\in\Omega,\qquad r>0.\tag{6.3}$$

По хорошо известной теореме v — вещественно аналитическая функция в $B_r(z_0)$. Запишем v в виде ряда по однородным полиномам

$$v(z)=v(z_0)+\sum_{j=1}^{2}v_{x_j}(z_0)(x_j-x_{j0})+$$
$$+\sum_{m\leqslant n}P_m(z-z_0),\qquad |z-z_0|<r,\qquad P_m(z-z_0)\neq 0.$$

Если v нелинейна, то можно проверить, что полином P_m наименьшей степени есть решение эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\sum\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(v_x(z_0))\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}P_m(z-z_0)=0,\qquad |z-z_0|<r.$$

Следовательно, $P_m(\zeta)$ аффинно связано с гармоническим полиномом $\operatorname{Re}a\zeta^m$ для некоторого комплексного числа a и $\partial P_m(\zeta)/\partial\zeta$ аффинно связано с $am\zeta^{m-1}$, $m>1$. Отсюда мы заключаем, что

для данного решения v уравнения (6.3), *не являющегося линейным в окрестности U точки z_0, $(\partial v/\partial z)(z)$ есть открытое отображение U.* (6.4)

Определим два отображения $\overline{\Omega}$ в плоскость. Первое — это гомеоморфизм $\overline{\Omega}$:

$$f^*(z)=\psi_{x_1}(z)-i\psi_{x_2}(z),\qquad z\in\overline{\Omega}.$$

Второе — непрерывное отображение $\overline{\Omega}$:

$$f(z)=u_{x_1}(z)-iu_{x_2}(z),\qquad z\in\overline{\Omega},$$

которое в силу (6.4) открыто в $\Omega \setminus I$, так как в противном случае u было бы линейным.

Теорема 6.2. *Пусть I — коинцидентное множество решения u задачи* (6.2). *Тогда*

(i) *I — связная и односвязная область, которая совпадает с замыканием своей внутренности;*

(ii) $f(\Omega) = f^*(I)$;

(iii) *$\Omega \setminus I$ гомеоморфно кольцу;*

(iv) *$\operatorname{int} I$ — связное множество.*

Доказательство. Пусть I_1 — множество точек $z \in \Omega$, для которых касательная плоскость в точке $(z, \psi(z))$:

$$\Pi_z: \quad y_3 = v(y)$$

не пересекает Ω. Это множество не пусто, так как ему принадлежит точка $\tilde{z} \in \Omega$, где ψ достигает своего максимума. Поскольку $\psi \in C^1$, то I_1 замкнуто и содержит некоторую окрестность $\tilde{z}$. Кроме того, $v(y) > \psi(y)$, если $y \in \Omega$, $y \neq z$, вследствие строгой вогнутости ψ.

Покажем, что $I_1 \subset I$. Действительно, v — решение уравнения $Av = 0$ в Ω и $v \geqslant 0$ на $\partial\Omega$. Следовательно, по теореме 8.3 гл. IV $u \leqslant v$ в Ω и тем самым

$$\psi(z) \leqslant u(z) \leqslant v(z) = \psi(z), \quad z \in I_1.$$

Точка $z \in I_1$ принадлежит внутренности этого множества до тех пор, пока v не обращается в нуль в некоторой точке $y \in \partial\Omega$. Если же $v(y) = 0$, $y \in \partial\Omega$, то пересечение Π_z с плоскостью, содержащей Ω, есть касательная к $\partial\Omega$. Такие точки $z \in I_1$ составляют границу I_1.

Обратное тоже верно. Пусть $P \in \partial\Omega$. Построим плоскость, которая содержит касательную к $\partial\Omega$ в точке P и касается ψ в некоторой точке $z \in \Omega$. Тогда по предыдущему $z \in I$ и соответствие $P \to z(P)$ является взаимно однозначным и непрерывным отображением вследствие строгой вогнутости ψ и строгой выпуклости Ω.

Для $z = z(P)$ пусть $w(y) = u(y) - v(y)$. Эта функция удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению

$$Lw = \sum \frac{\partial a_j}{\partial p_k}(u_y(z))\, w_{y_j y_k} = 0$$

в пересечении окрестности точки P с Ω. Применим принцип максимума, учитывая, что функция $w(y) \leqslant 0$ в окрестности P и достигает своего максимального значения, равного нулю. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) > \frac{\partial v}{\partial \nu}(P),$$

где ν — внешняя нормаль. Неравенство $u(y) > 0$ в Ω означает, что

$$0 > \frac{\partial u}{\partial \gamma}(P) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2}(P)\sin\theta, \qquad (6.5)$$

θ — угол между положительным направлением оси x_1 и внутренней нормалью в точке P. Поскольку v — линейная функция и касается ψ в точке z, то

$$0 < \frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}(P)\sin\theta < \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(z)\cos\theta + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(z)\sin\theta. \qquad (6.6)$$

Тангенциальная производная u равна нулю на $\partial\Omega$, так что

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P)\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2}(P)\cos\theta$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) = -\frac{\partial u}{\partial \nu}(P)\cos\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(P) = -\frac{\partial u}{\partial \nu}(P)\sin\theta.$$

Вместе с (6.5) это показывает, что функция $P \to f(P)$ отображает $\partial\Omega$ на звездообразную кривую Γ_1 относительно начала координат

С другой стороны, Π_z касается $\partial\Omega$ в P, и поэтому

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x_1}(P)\sin\theta - \frac{\partial v}{\partial x_2}(P)\cos\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(z)\sin\theta - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(z)\cos\theta.$$

Следовательно, $P \to f^*(z(P))$ отображает $\partial\Omega$ на звездообразную кривую Γ_2. Согласно (6.6), Γ_1 лежит внутри Γ_2 и не может пересекаться с последней.

Нас сейчас интересует внешняя граница β множества $f(\Omega)$, которая по определению есть граница неограниченной компоненты дополнения к $f(\Omega)$. Так как $f(\Omega)$ связно, то β также связно.

Поскольку $f(\partial\Omega) = \Gamma_1$ лежит внутри $\Gamma_2 = f^*(\partial I_1) = f(\partial I_1)$, то $\beta \cap \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Отображение f открыто на $\Omega \setminus I$ и $f(\Omega \setminus I) \cap \beta = \emptyset$. Поэтому если $z \in \bar\Omega$ и $f(z) \in \beta$, то $z \in I$ и $f(z) = f^*(z)$. Значит, $f^{*-1}(\beta) \subset I$ и является внешней границей $f^{*-1}(f(\Omega))$ вследствие того, что f^* — гомеоморфизм $\bar\Omega$. Рассмотрим компоненту V множества $f(\Omega) \setminus f(I)$. В силу открытости f на Ω и того факта, что $f(\partial\Omega) \subset \subset \operatorname{int} f(I)$, из $f(z) \in \partial V$ вытекает, что $z \in \partial I$. Следовательно, любая компонента U множества $f^{-1}(V)$ принадлежит $\Omega \setminus I$ и $\partial U \subset I$. По предыдущей лемме это невозможно, т. е. $f(\bar\Omega) \setminus f(I)$ пусто и тем самым $f(\bar\Omega) = f(I) = f^*(I)$.

Отсюда мы заключаем, что $I = f^{*-1}(f(\bar\Omega))$ связно, так как f^* — гомеоморфизм.

Пусть теперь $z_0 \in \partial I$ и $z_n \in \Omega \setminus I$ — такая последовательность, что $z_n \to z_0$. Отображение f открыто и, значит, $f(z_n) \in \operatorname{int} f(\Omega) = \operatorname{int} f(I)$. Кроме того, f^* — гомеоморфизм, и поэтому $f^{*-1}(f(z_n)) \in \in \operatorname{int} I$. Далее,

$$f^{*-1}(f(z_n)) \to f^{*-1}(f(z_0)) = z_0,$$

так как $f = f^*$ на I. Таким образом, $I = \overline{\operatorname{int} I}$.

Аналогично проверяется, что $\Omega\setminus I$ открыто и связно и, следовательно, $f(\Omega\setminus I)\subset \operatorname{int} f(I)=\operatorname{int} f^*(I)$ в силу открытости f. Помимо этого $f(\Omega\setminus I)$ связно и тем самым $f^{*-1}(f(\Omega\setminus I))\subset I_0$ — компонента $\operatorname{int} I$. Действительно, пусть I_1 — другая компонента $\operatorname{int} I$ и $z_1\in\partial I_1$, $z_1\notin\partial I_0$. Рассматривая последовательность $z_n\in\Omega\setminus I$, которая сходится к z_1, и $f^{*-1}(f^*(z_n))\in I_0$, приходим к тому, что $z_1\in\bar{I}_0$. Полученное противоречие означает, что $I_1=\varnothing$.

То, что $\Omega\setminus I$ гомеоморфно кольцу, доказывается стандартным путем. ∎

7. ЗАМЕЧАНИЕ О КОИНЦИДЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Проведенное выше исследование свойств коинцидентного множества опиралось на теорию функций комплексного переменного и тем самым применимо только к двумерным задачам. Первый шаг к изучению гладкости коинцидентного множества в высших размерностях был сделан в гл. IV, когда был получен критерий конечности периметра множества I. Здесь мы продолжим эти рассмотрения. Как и в § 1, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченное открытое множество с гладкой границей $\partial\Omega$ и препятствие

$$\psi\in C^2(\bar{\Omega}):\quad \max_{\Omega}\psi>0,\quad \psi<0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{7.1}$$

Будем предполагать, что неоднородный член вариационного неравенства

$$f\in C^1(\bar{\Omega}). \tag{7.2}$$

Предметом нашего изучения является следующая

Задача 7.1. *Требуется найти функцию*

$$u\in K:\ \int_{\Omega} u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx\geqslant\int_{\Omega} f(v-u)\,dx\quad \forall v\in K.$$

С точностью до небольших технических изменений доказательства, приводимые здесь, распространяются и на задачу 4.1 гл. IV.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* (7.1) *и* (7.2), *u — решение задачи* 7.1 *и I — коинцидентное множество. Пусть, далее,*

$$-\Delta\psi-f\geqslant\eta>0\quad \text{в}\quad \Omega$$

для некоторого $\eta>0$. Тогда существуют $r_0>0$ и λ, $0<\lambda<1$, такие что для каждого $x\in\partial I$ найдется $y\in B_r(x)$, для которого

$$B_{\lambda r}(y)\subset B_r(x)\cap(\Omega\setminus I)\quad \text{и}\quad |x-y|=(1-\lambda)r,\quad r\leqslant r_0.$$

Кроме того, для некоторого $\alpha>0$

$$\sup_{B_r(x)}(u-\psi)\geqslant\alpha r^2.$$

Из отмеченной в этой теореме плотности множества $\Omega \setminus I$ немедленно вытекает

Следствие 7.3. *В условиях теоремы* 7.2 $\operatorname{mes} \partial I = 0$.

Доказательство следствия 7.3. Так как I замкнуто, то $\partial I \subset I$. Далее

$$\frac{\operatorname{mes}(\partial I \cap B_r(x))}{\omega_N r^N} \leqslant \frac{\operatorname{mes}(I \cap B_r(x))}{\omega_N r^N} \leqslant \frac{\operatorname{mes}(B_r(x) \setminus B_{\lambda r}(y))}{\omega_N r^N} \leqslant 1-\lambda < 1,$$

где $\omega_N = \operatorname{mes} B_1(0)$. Таким образом, ни одна точка ∂I не может быть точкой плотности ∂I и, следовательно, $\operatorname{mes} \partial I = 0$. ∎

Доказательство теоремы 7.2. Поскольку I компактно, то существует окрестность Ω_0 этого множества в Ω. Выберем $r_0 > 0$ так, чтобы $B_r(x) \subset \Omega_0$ для каждого $x \in I$ при $r < 2r_0$. Заметим, что $u \in H^{2,\infty}(\Omega_0)$ в силу следствия 6.4 гл. IV. Пусть $\beta > 0$. Положим

$$w(x) = u(x) - \psi(x) - [1/(2N)]\beta\,|x-x_0|^2, \quad x \in \Omega,$$

где $x_0 \in \partial I$ — некоторая фиксированная точка. Тогда если $x \in \Omega \setminus I$, то

$$-\Delta w = -\Delta(u-\psi) + \beta = f + \Delta\psi + \beta \leqslant -\eta + \beta \leqslant$$
$$\leqslant -\tfrac{1}{2}\eta, \quad 0 < \beta \leqslant \tfrac{1}{2}\eta.$$

Следовательно, $-\Delta w < 0$ в $B_r(x_0) \cap (\Omega \setminus I)$, $r < r_0$. Согласно принципу максимума, w достигает своего максимума на $\partial(B_r(x_0) \cap \cap (\Omega \setminus I)) \subset \partial B_r(x_0) \cup \partial I$. Предположим сейчас, что x_0 удовлетворяет условию внутренней сферы относительно $\Omega \setminus I$. Под этим мы понимаем существование такого шара $B_\delta(\xi) \subset \Omega \setminus I$, что $x_0 \in \partial B_\delta(\xi)$. Имеем

$$w(x_0) = w_{x_j}(x_0) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Следовательно, по лемме Хопфа о граничной точке[1]), x_0 — не экстремальная точка w. Кроме того, $\max\limits_{B_r(x_0) \cap (\Omega \setminus I)} w > 0$.

Если $x \in \partial I$, то $w(x) = [1/(2N)]\beta\,|x-x_0|^2 \geqslant 0$, и поэтому существует $y \in \partial B_r(x_0)$, $y \notin I$, такое что $w(y) > 0$, или

$$u(y) - \psi(y) \geqslant [1/(2N)]\beta\,|y-x_0|^2 = [1/(2N)]\beta r^2 > 0.$$

Для того чтобы продолжить это неравенство на шар, воспользуемся тем обстоятельством, что $u_{x_i x_j} \in L^\infty(\Omega_0)$. Напомним, что выбор r гарантирует включение $B_r(y) \subset \Omega_0$. Поскольку функция $(u-\psi)_x$ липшицева в Ω_0, то мы можем написать

$$u(x) - \psi(x) = u(y) - \psi(y) + \sum_i [u_{x_i}(y) - \psi_{x_i}(y)](x_i - y_i) + R\,|x-y|^2,$$

[1]) См. Олейник О. А. О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа. — *Матем. сб.*, 24 (66), 1 (1949), с. 3—14; Hopf H. A remark on linear elliptic differential equations of second order. — Proc. Am. Math. Soc. 3 (1952), 791—793. — *Прим. перев.*

где $R(x, y)$ — остаток, и

$$|u_{x_i}(y)-u_{x_i}(x_0)| \leqslant \|u_{xx}\|_{L^\infty(\Omega_0)}|y-x_0|.$$

Поэтому, вспоминая, что $u_x=\psi_x$ на I, будем иметь

$$\begin{aligned}|u_{x_i}(y)-\psi_{x_i}(y)| &\leqslant |u_{x_i}(y)-u_{x_i}(x_0)|+|\psi_{x_i}(y)-\psi_{x_i}(x_0)| \\ &\leqslant \text{const}\,|y-x| \leqslant c_1 r.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}u(x)-\psi(x) &\geqslant u(y)-\psi(y)-c_1 r|x-y|-|R||x-y|^2 \geqslant \\ &\geqslant [1/(2N)]\beta r^2-c_1 r|x-y|-|R||x-y|^2 \geqslant \\ &\geqslant \{[1/(2N)]\beta-c_1\tau-|R|\tau^2\}r^2 \geqslant \alpha r^2>0\end{aligned}$$

для $|x-y|\leqslant \tau r$, где τ достаточно мало, но не зависит от $x_0 \in \partial I$ и $\alpha>0$.

Если теперь $x_0 \in \partial I$ — произвольная точка, то мы можем найти последовательность $x_k \in \partial I$, $x_k \to x_0$, элементы которой удовлетворяют условию внутренней сферы. По непрерывности $u(x)-\psi(x)\geqslant \alpha r^2$, если $|x-y|\leqslant \tau r$, и, таким образом, $B_{\tau r}(y)\subset \Omega\setminus I$. Переобозначая переменные, т. е. заменяя r на $r+\tau r<2r<2r_0$ и τ на $\lambda=\tau/(1+\tau)$, получаем, что

$$B_{\lambda r}(y)\subset B_r(x_0)\cap(\Omega\setminus I). \quad \blacksquare$$

Часть границы ∂I, которая не является частью границы $\operatorname{int} I$, в определенном смысле несущественна. Действительно, рассмотрим открытое множество $\omega=\Omega\setminus\overline{\operatorname{int} I}\supset \Omega\setminus I$ в Ω и заметим, что $\Omega\setminus I$ также открыто в Ω. Поскольку $\omega\setminus(\Omega\setminus I)\subset\partial I$ и $-\Delta u=f$ в $\Omega\setminus I$, то мы можем сказать, что $-\Delta u=f$ п.в. в ω. Однако ω — открытое множество, и, следовательно, теория регулярности для эллиптических уравнений гарантирует, что $-\Delta u=f$ в ω. Другими словами, ω — наибольшее открытое множество, для которого $-\Delta u=f$, и в этом смысле мы считаем, что $\partial I\setminus\partial \operatorname{int} I$ — несущественная часть границы ∂I.

Комментарии и библиографические указания

Изучение задач со свободной границей, связанных с вариационными неравенствами, было начато Леви и Стампаккья [1]. В случае интеграла Дирихле ($N=2$) было показано, что в условиях теоремы 3.4 и аналитичности ψ граница коинцидентного множества есть аналитическая жорданова кривая Читатель может вывести этот результат непосредственно из теорем 1.1 и 6.2. В § 2 было проведено предварительное обсуждение вопросов, которые получат дальнейшее развитие в гл. VI.

Прежде чем исследовать более общие задачи, например такие, где непосредственно неприменим принцип симметрии Шварца, полезно было установить некоторые предварительные свойства регулярности свободной границы, скажем, с целью доказательства ее аналитичности. Это мотивировало рассмотрение тех вопросов, которые изложены в § 3 (см. Киндерлерер [3]). При этом было модифицировано доказательство Киндерлерера [4]. Лемма 3.3 и теорема 3.5 связаны с одним результатом Хартмана и Уинтнера [1].

Для того чтобы проанализировать свойства свободной границы в случае минимальной поверхности, мы сначала показали, что ∂I непрерывно дифференцируема (см. § 3 и 5). Аналитичность ∂I (когда ψ также аналитична) получена как следствие разрешимости системы дифференциальных уравнений, связывающей конформное представление минимальной поверхности $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = u(x), (x_1, x_2) \in \Omega \setminus I\}$ с ее гармоническим или аналитическим продолжением Эта идея принадлежит Г. Леви, который использовал ее для изучения минимальной поверхности с заданной или частично заданной свободной границей (Леви [2, 4]). Примеры, иллюстрирующие такой подход, даны в упражнениях.

Теорема 3.6 принадлежит Кафарелли и Ривьере [2].

Шеффер [1] изучал вопросы существования особенностей у ∂I. Асимптотическое описание было разработано Кафарелли и Ривьере [1]. Материал § 4 заимствован из работы Киндерлерера и Ниренберга [1].

Результаты § 7 принадлежат Кафарелли и Ривьере [1]. Они служат отправной точкой для исследований свойств коинцидентных множеств в больших размерностях.

Возмущения свободной границы рассматривались Шеффером [1] и Леви [9].

Упражнения

1. Пусть функция φ аналитична в $G = \{t = t_1 + it_2 \mid |t| < 1, \operatorname{Im} t > 0\}$, непрерывна в $G \cup (-1, 1)$ и для каждого $t_0 \in [-R, R]$, $R < 1$, существует такое комплексное число $c = c(t_0)$, что

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} - c \right| \leqslant C_R \, |t - t_0|^{\mu}, \quad t \in G \cup (-1, 1), \quad |c| \leqslant C_R,$$

где μ, $0 < \mu \leqslant 1$, — некоторое фиксированное число. Покажите, используя теорему Коши о представлении, что $\varphi \in C^{1, \mu}(\bar{G} \cap B_R)$.

2. Докажите теорему 3.6.

3. Покажите, что в условиях теоремы 3.4 ∂I — «регулярная» кривая, т. е. принадлежит классу C^1. [*Указание.* Вследствие замечаний выше единственные возможные особенности ∂I — это острия. Пусть $z_0 \in \partial I$. Рассмотрите отображение Φ: $B_\varepsilon(z_0) \cap (\Omega \setminus I) \to B_\varepsilon(z_0) \cap \operatorname{int} I$, $\Phi(z) = f^{*-1}(f(z))$ и заметьте, что $\Phi(z) = z$, если $z \in \partial I$.]

4. Пусть $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 2\}$, $\varphi_n(z) = 1 - (|z - z_n|^2 / r_n^2)$, где $z_n = \dfrac{1}{n}$, $r_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$. Положим

$$\psi_k(z) = \max_{n \leqslant k} \varphi_n(z), \quad z \in \Omega.$$

Пусть u_k — решение задачи (1.1) с препятствием ψ_k и I_k — соответствующее коинцидентное множество. Покажите, что I_k имеет по крайней мере k компонент. Покажите также, что ψ_k можно так видоизменить, что новая функция $\tilde{\psi}_k$ будет бесконечно дифференцируемой, а u_k будет решением задачи (1.1) с препятствием $\tilde{\psi}_k$.

5. Пусть $G = \{z = x + iy \mid |z| < 1, y > 0\}$, $\sigma = (-1, 1)$ и $u \in C^1(\bar{G})$ удовлетворяет условиям

$$\Delta u = 0 \text{ в } G, \quad u_y = A(x, u, u_x) \text{ на } \sigma,$$

где функция $A(x, u, p)$ аналитична по совокупности переменных в окрестности $x = 0$, $u = u(0)$, $p = u_x(0)$. Покажите, что u может быть продолжена гармонически в окрестность точки $z = 0$, и, следовательно, u имеет аналитическое граничное значение на σ (Леви [3]). [*Указание.* Пусть v — гармонически сопряженная функция к u в G, $v(0) = 0$, и пусть $f(z) = u + iv$, $z = x + iy \in G$. Аналитическое продолжение f может быть найдено путем решения подходящего дифференциального

уравнения. Заметьте, что

$$\overline{f'(z)}-f(z)-2iA\left(z,\ \frac{1}{2}[f(z)+\overline{f(z)}],\ \frac{1}{2}[f'(z)+\overline{f'(z)}]\right)=0,\qquad z\in\sigma.$$

Покажите, что существует единственное голоморфное решение φ уравнения

$$\varphi'(z)-f(z)-2iA\left(z,\ \frac{1}{2}[\varphi(z)+f(z)],\ \frac{1}{2}[\varphi'(z)+f'(z)]\right)=0,\qquad z\in G,$$

где $|z|$ мало, и что $\varphi(z)=\overline{f(z)}$, если $z\in\sigma$ и $|z|$ мало.]

6. Пусть Ω — область в плоскости $z=x_1+ix_2$, граница которой содержит дугу Γ класса C^1. Пусть, далее, $z=0\in\Gamma$ и $u\in C^1(\Omega\cup\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta u=0 \text{ в } \Omega,\qquad u=0 \text{ на } \Gamma,\qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}=A(x_1,\ x_2) \text{ на } \Gamma,$$

где A — аналитическая функция переменных x_1, x_2 в окрестности $z=0$, $A(0,0)\neq 0$. Покажите, что Γ аналитична в некоторой окрестности нуля.

7. (Теорема Келлога.) Пусть Ω — односвязная ограниченная область в плоскости $z=x_1+ix_2$, граница которой содержит дугу

$$\Gamma:\qquad x_2=f(x_1),\qquad |x_1|<a,\qquad f(0)=0.$$

Предположим, что $f\in C^{1,\lambda}([-a,\ a])$, $0<\lambda<1$ и φ — конформное отображение $G=\{|t|<1\mid \operatorname{Im} t>0\}$ на Ω, которое переводит $(-1,\ 1)$ на Γ и $\varphi(0)=0$. Докажите, что $\varphi\in C^{1,\tau}(B_r\cap\bar{G})$ для каждых $\tau<\lambda$ и $r<1$. [*Указание*. Рассмотрите $z^*(z)=z-2if((z+\bar{z})/2)$ для достаточно малых $|z|$ и примените теорему 3.1.] Продолжите дальше рассуждение и докажите, что $\varphi\in C^{1,\lambda}(B_r\cap\bar{G})$, $r<1$.

Глава VI

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет показано, как используются метод годографа и его обобщения для доказательства гладкости свободных границ. Набросок этой методики был дан в § 2 гл. V. Там новые независимые и зависимые переменные определялись через решение w вариационного неравенства. В этой главе мы пойдем еще дальше. Например, в случае одного уравнения в качестве новых независимых переменных будет взят набор комбинаций производных от w или сама функция w. Цель во всех случаях состоит в выпрямлении свободной границы. При этом, правда, получаются нелинейные уравнения. Для доказательства гладкости решений нелинейной задачи можно использовать известные теоремы.

Однако при этом возникает ряд осложнений. Например, в задаче со свободной границей вместо одного уравнения может оказаться система. Кроме того, исходные зависимые переменные могут быть заданы на двух сторонах свободной границы, как это было в вариационном неравенстве для двух мембран (гл. II, упр. 13). Для преодоления первой трудности приходится изучать нелинейные эллиптические системы. Краткое изложение этой теории приведено в § 3, чтобы условиться о понятиях, используемых в дальнейшем, а также для удобства читателя, не знакомого с основами этой теории. При решении задач, в которых функции определены по обе стороны от свободной границы, вводится преобразование отражения, определяемое с помощью преобразования годографа. Это преобразование всегда приводит к системе уравнений.

Другой важный вопрос состоит в том, чтобы выяснить, будет ли задача после применения преобразований годографа, отражения и т. д. удовлетворять предположениям теории о гладкости решений эллиптических задач. Этот вопрос зачастую является наиболее сложным и технически громоздким. За исключением отдельных примеров, он остается за пределами этой книги (если $N > 2$). Кратко и без доказательств он обсуждается в § 2.

Наши исследования будут локальными. При этом основная цель состоит в том, чтобы при некоторых исходных предположениях о гладкости Г доказать, что Г обладает такой гладкостью, какую

допускают исходные данные задачи. На этом пути мы хотим использовать условия на свободной границе, которые обеспечивают ее регулярность.

Эта глава не зависит от гл. V.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГОДОГРАФА И ЛЕЖАНДРА: ТЕОРИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $u \in C^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. На протяжении этой главы используются обозначения $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ и т. д. Преобразование области Ω, определенное соотношениями

$$\begin{aligned} y_\sigma &= x_\sigma, \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ y_N &= -u_N, \end{aligned} \tag{2.1}$$

называется (частичным) преобразованием годографа первого порядка, а функция $v(y)$, определенная равенством

$$v(y) = x_N y_N + u(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

называется преобразованием Лежандра первого порядка функции u. Предположим, что (2.1) определяет взаимно однозначное отображение Ω на область U. Преобразование Лежандра удовлетворяет соотношениям

$$dv = x_N\, dy_N + y_N\, dx_N + du = x_N\, dy_N + \sum_{\sigma < N} u_\sigma\, dy_\sigma,$$

в силу которых

$$\begin{aligned} v_\sigma &= u_\sigma, \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ v_N &= x_N. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем нижний индекс у u обозначает дифференцирование по x, а у v — дифференцирование по y. Обратное отображение к (2.1) задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_\sigma &= y_\sigma, \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ x_N &= v_N. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Кроме того, если u удовлетворяет некоторому уравнению второго порядка, то v также обладает этим свойством. Чтобы показать это, просто заметим, что из соотношений

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ -u_{1N} & & \cdots & -u_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ -\dfrac{v_{1N}}{v_{NN}} & \cdots & -\dfrac{v_{N-1\,N}}{v_{NN}} & \dfrac{1}{v_{NN}} \end{pmatrix}$$

следуют равенства

$$\frac{\partial y_N}{\partial x_N} = -u_{NN} = \frac{1}{v_{NN}}, \quad \frac{\partial y_N}{\partial x_\sigma} = -u_{N\sigma} = -\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}. \tag{2.5}$$

Другими словами,

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} = \partial_\sigma - \frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}\sigma_N, \quad \frac{\partial}{\partial x_N} = \frac{1}{v_{NN}}\partial_N, \tag{2.6}$$

где $\partial_k = \partial/\partial y_k$. В частности,

$$u_{\sigma\sigma} = v_{\sigma\sigma} - (v_{\sigma N}^2/v_{NN}), \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1,$$

и поэтому, например,

$$\Delta u = -(1/v_{NN}) - (1/v_{NN})\sum v_{\sigma N}^2 + \sum v_{\sigma\sigma}. \tag{2.7}$$

Более общо, если u удовлетворяет некоторому эллиптическому уравнению, то тем же свойством обладает v (см. упр. 1).

Другую замену переменных, заданную равенствами

$$\begin{aligned} y_\sigma &= x_\sigma, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ y_N &= u(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

будем называть преобразованием годографа нулевого порядка. Свяжем с ним новую зависимую переменную

$$\psi(y) = x_N. \tag{2.9}$$

Предположим опять, что (2.8) определяет взаимно однозначное отображение Ω на область U. Преобразование нулевого порядка удовлетворяет равенству

$$dy_N = du = \sum_\sigma u_\sigma\, dx_\sigma + u_N\, dx_N = \sum_\sigma u_\sigma\, dy_\sigma + u_N\, d\psi,$$

$$\text{т. е.} \quad \psi_\sigma = -u_\sigma/u_N, \quad \psi_N = 1/u_N. \tag{2.10}$$

Отметим также, что обратным к (2.8) является преобразование

$$\begin{aligned} x_\sigma &= y_\sigma, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ x_N &= \psi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} &= \partial_\sigma - \frac{\psi_\sigma}{\psi_N}\partial_N, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ \frac{\partial}{\partial x_N} &= \frac{1}{\psi_N}\partial_N. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Отметим еще, что

$$u_{\sigma\sigma} = -\frac{\psi_{\sigma\sigma}}{\psi_N} + 2\frac{\psi_\sigma}{\psi_N^2}\psi_{\sigma N} - \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_N^3}\psi_{NN},$$

$$u_{NN} = -\frac{1}{\psi_N^3}\psi_{NN},$$

поэтому, в частности,

$$\Delta u = -\frac{1}{\psi_N}\sum \psi_{\sigma\sigma} + \frac{2}{\psi_N^2}\sum \psi_\sigma \psi_{\sigma N} - \frac{1}{\psi_N^3}\left(1 + \sum \psi_\sigma^2\right)\psi_{NN}. \tag{2.13}$$

И снова, если u удовлетворяет эллиптическому уравнению, то и ψ обладает этим свойством (упр. 2).

Применим теперь эти преобразования к изучению одной простой задачи со свободной границей. Как и раньше, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область. Пусть $0 \in \partial\Omega$, и предположим, что около нуля $\partial\Omega$ — это гиперповерхность Γ гладкости C^1 с внутренней нормалью в нуле, направленной в положительную сторону оси x_N. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{gathered} \Delta u(x) = a(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad \sum_1^N c_k u_k(x) = b, \quad x \in \Gamma, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где $a(x)$ — гладкая функция в полной[1]) окрестности точки $x=0$ и для простоты $c_1, \ldots, c_N, b \in \mathbb{R}$. Всегда будет налагаться условие невырожденности $c_N \neq 0$. Другими словами, необходимо требовать, чтобы направление $c = (c_1, \ldots, c_N)$ не было касательным к Γ.

Мы рассмотрим два случая задачи (2.14). В первом предполагается, что $b=0$, $c_N \neq 0$ и $a(0) < 0$. Попытаемся применить в этом случае преобразование (2.1). Действительно, так как $c_N \neq 0$, то $u_k(x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant N$, на Γ в той окрестности 0, где $\partial\Omega$ задается с помощью Γ. Поэтому (2.14) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u &= a \quad && \text{в} \quad \Omega, \\ u = u_k &= 0 \quad && \text{на} \quad \Gamma, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Чтобы установить взаимную однозначность (2.1) около 0 в Ω, отметим, что так как $u_k = 0$ на Γ и $(0, \ldots, 0, 1)$ — нормаль к Γ в точке $x=0$, то

$$u_{k\sigma}(0) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1,$$

и поэтому, в силу (2.15), $u_{NN}(0) = a(0) < 0$. Отсюда вытекает, что (2.1) отображает окрестность нуля в Ω, скажем всю область Ω, на область $U \subset \{y \mid y_N > 0\}$, а Γ — на часть S гиперплоскости $y_N = 0$. Следовательно, функция $v(y)$, определенная соотношением (2.2), удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered} -(1/v_{NN}) - (1/v_{NN})\sum (v_{N\sigma})^2 + \sum v_{\sigma\sigma} - a(y', v_N) = 0 \ \text{ в } \ U, \\ v = 0 \ \text{ на } \ S, \quad y' = (y_1, \ldots, y_{N-1}), \end{gathered} \tag{2.16}$$

---

[1]) Под полной окрестностью автор всегда понимает обычную окрестность. В данном случае с помощью этого термина подчеркивается, что функция $a(x)$ определена и является гладкой в области более широкой, чем Ω. — *Прим. ред.*

а Γ допускает представление

$$\Gamma: \quad x_N = v_N(x', 0), \quad (x', 0) \in S. \tag{2.17}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x) \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ *удовлетворяет* (2.15) *с* $a(0) \neq 0$. *Если* $a \in C^{m,\alpha}(B_r(0))$, $m \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, *то существует такая окрестность* $B_\rho(0)$, *что* $u \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega} \cap B_\rho(0))$ *и* $B_\rho(0) \cap \Gamma \subset \subset C^{m+1,\alpha}$. *Если а аналитична в* $B_r(0)$, *то* $\Gamma \cap B_\rho(0)$ *также аналитична.*

Доказательство. Функция v является решением краевой задачи (Дирихле) (2.16). Согласно Агмону и др. [1, теорема 11.1],

$$v(y) \in C^{m+2,\alpha}(U \cup S).$$

Следовательно, $v_j \in C^{m+1,\alpha}(U \cup S)$ и, в частности, (2.17) — это $C^{m+1,\alpha}$-параметризация Γ. Для завершения доказательства заметим, что так как отображение $x = (y', v_N(y))$ принадлежит классу $C^{m+1,\alpha}$, то такой же гладкостью обладает обратное отображение $y = y(x)$. Поэтому

$$u_N(x) = -y_N(x) \in C^{m+1,\alpha}(\bar{\Omega} \cap B_\rho(0)),$$

$$u_\sigma(x) = v_\sigma(y(x)) \in C^{m+1,\alpha}(\bar{\Omega} \cap B_\rho), \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1.$$

Если $a(x)$ аналитична, то отсюда следует, что (2.17) дает аналитическую параметризацию Γ (Морри [1] или Фридман [1]). ∎

В случае $b \neq 0$ мы сталкиваемся с другой ситуацией. Итак, предположим теперь, что $b \neq 0$ и $c_N \neq 0$, и введем новые зависимые переменные (2.8). Опять, так как $u = 0$ на Γ и $(0, \ldots, 0, 1)$ — нормаль к Γ в точке $x = 0$, то $u_\sigma(0) = 0$, $1 \leqslant \sigma \leqslant N-1$, и поэтому $u_N(0) = b/c_N \neq 0$.

Пусть $b/c_N > 0$; тогда (2.8) является взаимно однозначным отображением части Ω около $x = 0$, которую мы будем считать всей Ω, на область $U \subset \{y \mid y_N > 0\}$. При этом Γ отображается на часть S гиперплоскости $\{y \mid y_N = 0\}$. Из (2.10), (2.13) и (2.14) следует, что

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\psi_N}\sum \psi_{\sigma\sigma} + \frac{2}{\psi_N^2}\sum \psi_\sigma \psi_{\sigma N} - \frac{1}{\psi_N^3}\left(1 + \sum \psi_\sigma^2\right)\psi_{NN} - a(y', \psi) = 0 \text{ в } U, \\ \sum c_\sigma \psi_\sigma + b\psi_N = c_N \text{ на } \Gamma. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Кроме того, Γ можно представить в виде

$$\Gamma: \quad x_N = \psi(x', 0), \quad (x', 0) \in S. \tag{2.19}$$

Следующее утверждение мы установим только в аналитическом случае.

Теорема 2.2. *Пусть* $u \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ *удовлетворяет* (2.14), *где а — аналитическая функция в полной окрестности начала координат, и*

предположим, что $b \neq 0$ *и* $c_N \neq 0$. *Тогда поверхность* Γ *аналитична около* $x=0$.

Доказательство. Применим снова теорему 11.1 Агмона и др. [1]. В этом случае граничное условие является условием Неймана, а не Дирихле. Но теорема о гладкости все равно применима, так как это граничное условие коэрцитивного типа. Мы обсудим это свойство более подробно в следующем параграфе. ∎

Можно ли ослабить предположения этих теорем? Для справедливости теоремы 2.2 достаточно предположить, что $u \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$, а Γ — поверхность класса C^1. Для теоремы 2.1 сформулируем следующий критерий.

Теорема 2.3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область с* $0 \in \partial\Omega$ *и* $u \in H^{2,\infty}(\Omega)$ *удовлетворяет* (2.15) *около* $x=0$ *в* Ω *и на* $\partial\Omega$. *Предположим, что* $a(x) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *для некоторого* α, $0<\alpha<1$, *и* $a(0) \neq 0$. *Если*

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-N} \operatorname{mes}(B_\rho(0) \cap \Omega) > 0, \tag{2.20}$$

то

(i) $\partial\Omega$ *около* $x=0$ *является гиперповерхностью* Γ *класса* C^1 *и*

(ii) $u \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Этот параграф является кратким введением в теорию эллиптических систем. Большинство приводимых здесь определений и свойств хорошо известно, однако и читатели, не вполне знакомые с «весами» и их использованием, смогут получить тут необходимые сведения, не прибегая к другим источникам.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область, которая в наших приложениях обычно будет либо ограниченной, либо совпадающей с $\mathbb{R}^n_+ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_N > 0\}$. Положим

$$D = (D_1, \ldots, D_n), \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Пусть $L_{kj}(y, D)$, $1 \leqslant k$, $j \leqslant n$, — линейные дифференциальные операторы с непрерывными комплекснозначными коэффициентами. Рассмотрим систему уравнений для зависимых переменных $u^1, \ldots, u^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{kj}(y, D) u^j(y) = f_k(y) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.1}$$

где f_k — заданные, скажем гладкие, функции. Каждому уравнению припишем целый вес $s_k \leqslant 0$, а каждому зависимому переменному —

целый вес $t_j \geqslant 0$ так, чтобы[1])

$$\operatorname{ord} L_{kj}(y, D) \leqslant s_k + t_j \text{ в } \Omega, \quad 1 \leqslant k, \ j \leqslant n, \qquad \max_k s_k = 0. \tag{3.2}$$

Такое задание весов называется *согласованным*. Считается, что $L_{kj}(y, D) \equiv 0$, если $s_k + t_j < 0$. Пусть $L'_{kj}(y, D)$ обозначает совокупность членов оператора $L_{kj}(y, D)$, имеющих точный порядок $s_k + t_j$; тогда L'_{kj} — либо нулевой оператор, либо оператор, однородный по D порядка $s_k + t_j$.

Определение 3.1. Система (3.1) называется *эллиптической* (*с весами* s_k и t_j), если

$$\operatorname{rank}(L'_{kj}(y, \xi)) = n \quad \text{для любых } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \text{ и } y \in \Omega \tag{3.3}$$

и, кроме того, для каждой пары независимых векторов ξ, $\eta \in \mathbb{R}^N$ и $y \in \Omega$ полином (по z) $p(z) = \det(L'_{kj}(y, \xi + z\eta))$ имеет точно $\mu = \frac{1}{2}\deg p$ корней с положительной мнимой частью и $\mu = \frac{1}{2}\deg p$ корней с отрицательной мнимой частью.

Условие о корнях при $N \geqslant 3$ выполняется автоматически, но при $N = 2$ уравнение может удовлетворять условию (3.3), но не удовлетворять условию о корнях. В качестве примера можно взять уравнение Коши — Римана $\partial u / \partial \bar{z} = f$ и любые его степени.

Матрица $L'_{kj}(y, \xi)$ называется *главным символом*. Предположим, что при фиксированном $y_0 \in \Omega$ мы ищем решения однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} L'_{kj}(y_0, D)\, u^j(y) = 0, \qquad y \in \mathbb{R}^N, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.4}$$

имеющих вид $u^j(y) = c^j e^{iy\xi}$, $c^j \in \mathbb{C}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$. Тогда (3.3) выполняется в том и только том случае, если $c^1 = \ldots = c^n = 0$ для любых $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$, $y_0 \in \Omega$. Такие решения называются *экспоненциальными*. Итак, эквивалентным (3.3) является условие отсутствия нетривиальных экспоненциальных решений у главной части системы (3.1), т. е. у системы (3.4).

Общая система уравнений

$$F_k(y, Du^1, \ldots, Du^n) = 0, \qquad y \in \Omega, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.5}$$

где символ D обозначает *все* производные, а не только производные первого порядка, называется эллиптической на решении $u = (u^1, \ldots \ldots, u^n)$, если уравнения в вариациях

$$\sum_{j=1}^{n} L_{kj}(y, D)\, \bar{u}^j = \frac{d}{dt} F_k(y, D(u^1 + t\bar{u}^1), \ldots, D(u^n + t\bar{u}^n))\big|_{t=0} = 0 \tag{3.6}$$

образуют эллиптическую систему в смысле определения 3.1.

[1]) Через $\operatorname{ord} L$ обозначается порядок дифференциального оператора L. — *Прим. перев.*

Опишем теперь граничные условия. Эти условия достаточно рассмотреть только на части S границы $\partial\Omega$, принадлежащей гиперплоскости $y_N=0$. Пусть $B_{hj}(y, D)$, $1\leqslant h\leqslant\mu$, $1\leqslant j\leqslant n$, — линейные дифференциальные операторы с непрерывными коэффициентами.

Определение 3.2. Набор граничных условий

$$\sum_{j=1}^{n} B_{hj}(y, D)\, u^j(y)=g_h(y) \text{ на } S\subset\partial\Omega\cap\{y_N=0\}, \quad 1\leqslant h\leqslant\mu, \tag{3.7}$$

является *коэрцитивным для системы* (3.1), если

(i) система (3.1) эллиптична и число $2\mu=\sum\limits_{1}^{n}(s_j+t_j)\geqslant 0$ четно;

(ii) существуют такие целые числа r_h, $1\leqslant h\leqslant\mu$, что $\operatorname{ord} B_{hj}(y, D)\leqslant r_h+t_j$ на S;

(iii) для каждого $y_0\in S$ однородная граничная задача

$$\begin{aligned} &\sum_j L'_{kj}(y_0, D)\, u^j=0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \quad 1\leqslant k\leqslant n,\\ &\sum_j B'_{hj}(y_0, D)\, u^j=0 \quad \text{на} \quad y_N=0, \quad 1\leqslant h\leqslant\mu, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где B'_{hj} — часть B_{hj} точного порядка r_h+t_j, не имеет нетривиальных ограниченных экспоненциальных решений вида

$$u^j(y)=e^{i\xi'y'}\varphi^j(y_N), \quad 1\leqslant j\leqslant n, \quad 0\neq\xi'\in\mathbb{R}^{N-1}.$$

[Здесь, как обычно, $y'=(y_1, \ldots, y_{N-1})$ и $\xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})$.]

Мы можем также распространить понятие коэрцитивности на нелинейные системы. Набор граничных условий

$$\Phi_h(y, Du^1, \ldots, Du^n)=0 \text{ на } S, \quad 1\leqslant h\leqslant\mu, \tag{3.9}$$

является *коэрцитивным для системы* (3.5) *на* $u=(u^1, \ldots, u^n)$, если существуют такие веса $r_1, \ldots, r_\mu$, что набор линеаризованных граничных условий

$$\sum_j B_{hj}(y, D)\,\bar{u}^j = \frac{d}{dt}\Phi_h(y, D(u^1+t\bar{u}^1), \ldots, D(u^n+t\bar{u}^n))\big|_{t=0}=0 \text{ в } S \tag{3.10}$$

является коэрцитивным для системы уравнений (3.6) на S.

В следующих параграфах наша цель будет состоять в сведении с помощью преобразований годографа и Лежандра задач со свободной границей к нелинейным эллиптическим системам с коэрцитивными граничными условиями. Эти системы имеют много интересных свойств, связанных с существованием и единственностью решений, но нас будут интересовать лишь свойства гладкости их решений. Сформулируем здесь теорему, которая нам понадобится в дальней-

шем. Пусть U — окрестность 0 в $\mathbb{R}^N_+$ и $S=\partial U \cap \{y_N=0\}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $u=(u^1, \ldots, u^n)$ — *решение задачи*

$$\begin{aligned} &F_k(y, Du^1, \ldots, Du^n)=0 \quad \text{в} \quad U, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ &\Phi_h(y, Du^1, \ldots, Du^n)=0 \quad \text{на} \quad S, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где (3.11) — *эллиптическая и коэрцитивная на и задача с весами* s_k, t_j, r_h, $1 \leqslant j$, $k \leqslant n$, $1 \leqslant h \leqslant \mu$. *Предположим также, что функции* F_k *и* Φ_h *аналитичны по* y *и производным от* u. *Пусть* $r_0 = \max\limits_h (0, 1+r_h)$. *Если* $u^j \in C^{t_j+r_0, \alpha}(U \cup S)$ *при некотором* $\alpha > 0$, *то* u^j *аналитичны в* $U \cup S$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

В качестве первого примера эллиптической системы рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta u^j &= f_j \quad \text{в} \quad U, \quad 1 \leqslant j \leqslant \mu, \\ \sum_{j=1}^{\mu} a_{hj} u^j &= g_h \quad \text{на} \quad S, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где (a_{hj}) — постоянная матрица размера $\mu \times \mu$ и, как обычно, U — окрестность 0 в $\mathbb{R}^N_+$, а $S=\partial U \cap \{y_N=0\}$. Припишем каждому уравнению вес $s_k=0$, каждому u^j — вес $t_j=2$, а каждому граничному условию вес $r_h=-2$. Система, соответствующая (3.8), имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}^j &= 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \quad 1 \leqslant j \leqslant \mu, \\ \sum a_{hj} \bar{u}^j &= 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{N-1}, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu. \end{aligned}$$

Ограниченное экспоненциальное решение этих дифференциальных уравнений дается соотношениями

$$\begin{aligned} &\bar{u}^j(y', t) = e^{i\xi' y'} \varphi^j(t), \quad t>0, \quad y' \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ &\varphi^j(t) = c^j e^{-|\xi'|t}, \quad c^j \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

для каждого $0 \neq \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Следовательно, $\varphi^j(t) \equiv 0$, $1 \leqslant j \leqslant \mu$, тогда и только тогда, когда $c^1 = \ldots = c^\mu = 0$ является единственным решением системы

$$\sum_1^{\mu} a_{hj} c^j = 0, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu,$$

т. е. задача (3.12) коэрцитивна в том и только том случае, если $\det(a_{hj}) \neq 0$. В частности, коэрцитивна задача Дирихле для уравнения Пуассона и, более того, коэрцитивна задача Дирихле для любого эллиптического уравнения (упр. 3).

Покажем, что выбор весов для системы может оказаться не таким уж простым делом. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\Delta u^1 = 0, \quad \Delta u^2 + \lambda u^2 = 0 \quad \text{в} \quad U, \\ &u^1 - u^2 = 0, \quad D_N u^1 - D_N u^2 = 0 \quad \text{на} \quad S, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Итак, что можно сказать о задаче для двух различных уравнений с совпадающими данными Коши на гиперплоскости $y_N = 0$? Предварительное приписывание «обычных весов» $s_1 = s_2 = 0$, $t_1 = t_2 = 2$, $r_1 = -2$, $r_2 = -1$ приводит к «линеаризованной системе»

$$\begin{matrix} \Delta \bar{u}^1 = 0, \\ \Delta \bar{u}^2 = 0 \end{matrix} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \qquad \begin{matrix} \bar{u}^1 - \bar{u}^2 = 0, \\ D_N \bar{u}^1 - D_N \bar{u}^2 = 0 \end{matrix} \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^{N-1},$$

которая не является коэрцитивной. Введем теперь $w = u^2 - u^1$; тогда (3.13) запишется в виде

$$\begin{matrix} \Delta u^1 = 0, \\ \Delta w + \lambda (w + u^1) = 0 \end{matrix} \quad \text{в} \quad U, \qquad \begin{matrix} w = 0, \\ D_N w = 0 \end{matrix} \quad \text{на} \quad S. \tag{3.14}$$

Положим $s_1 = 0$, $s_2 = -2$, $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ и $r_1 = -4$, $r_2 = -3$. Главной частью задачи (3.14) является задача

$$\begin{matrix} \Delta \bar{u}^1 = 0, \\ \Delta \bar{w} + \lambda \bar{u}^1 = 0 \end{matrix} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \qquad \begin{matrix} \bar{w} = 0, \\ D_N \bar{w} = 0 \end{matrix} \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^{N-1}. \tag{3.15}$$

Взяв $\bar{u}^1(y', t) = e^{iy'\xi'}\varphi(t)$ и $\bar{w}(y', t) = e^{iy'\xi'}\zeta(t)$, получим, что $\varphi(t) = ce^{-|\xi'|t}$, а ζ является решением задачи

$$\zeta''(t) - |\xi'|^2 \zeta(t) = -\lambda c e^{-|\xi'|t},$$

$$\zeta(0) = 0, \tag{3.16}$$

$$\zeta'(0) = 0 \tag{3.17}$$

с дополнительным условием, что $\sup |\zeta| < \infty$. Следовательно, $\zeta(t) = C_0 e^{-|\xi'|t} + C_1 t e^{-|\xi'|t}$ и, в силу (3.16) и (3.17), $C_0 = 0$, $-|\xi'|C_0 + C_1 = 0$. Поэтому $C_0 = C_1 = c = 0$, и, значит, у задачи (3.15) нет ограниченных экспоненциальных решений. С помощью теоремы 3.3 выводится

Теорема 3.4. *Пусть решение* (u^1, u^2) *задачи* (3.13) *с* $\lambda \neq 0$ *определено в окрестности* U *точки* $y = 0$ *из полупространства* $\{y_N > 0\}$. *Тогда данные Коши функций* u^1, u^2, *заданные на* $S \subset \{y_N = 0\}$, *аналитичны.*

Приведем второе доказательство теоремы. Применив Δ ко второму из уравнений (3.14), получим, что w является решением следующей краевой задачи для уравнения четвертого порядка:

$$(\Delta^2 + \lambda \Delta) w = 0 \quad \text{в} \quad U, \qquad \begin{matrix} w = 0, \\ D_N w = 0 \end{matrix} \quad \text{на} \quad S. \tag{3.18}$$

Эта задача коэрцитивна с обычными весами $s = 0$, $t = 4$, $r_1 = -4$, $r_2 = -3$. Заметим, что $t = t_2$. Следовательно, w аналитична в $U \cup S$. Так как $\lambda \neq 0$, то функция $u^1 = -(1/\lambda)\Delta w - w$ также аналитична. Приведенное доказательство наводит на мысль, что преобразования, которые нужно произвести в задаче, чтобы она стала коэрцитивной при «обычных весах», сводятся к дифференцированию уравнений.

Интересно сравнить одну простую задачу сопряжения [1]) с задачей, рассмотренной выше. Положим $U^+=\{y_N>0\}\cap B_1(0)$, $U^-=\{y_N<0\}\cap\cap B_1(0)$ и предположим, что функции $u^1\in C^1(\overline{U}^+)$, $v\in C^1(\overline{U}^-)$ являются решениями задачи

$$\begin{aligned}\Delta u^1+\lambda u^1&=0 \text{ в } U^+, & u^1-v&=0,\\ \Delta v&=0 \text{ в } U^-, & D_Nu^1-D_Nv&=0\end{aligned}\quad \text{на } y_N=0, \tag{3.19}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$. Определяя $u^2(y)\in C^1(\overline{U}^+)$ с помощью равенства $u^2(y)=v(y',\ -y_N)$, получим, что

$$\begin{aligned}\Delta u^1+\lambda u^1&=0,\\ \Delta u^2&=0\end{aligned}\ \text{ в } U^+,\quad \begin{aligned}u^1-u^2&=0,\\ D_Nu^1+D_Nu^2&=0\end{aligned}\ \text{ на } y_N=0. \tag{3.20}$$

Легко видеть, что эта система коэрцитивна с «обычными весами» $s_1=s_2=0$, $t_1=t_2=2$, $r_1=-2$, $r_2=-1$ *независимо от того, равно λ нулю или нет.* Следовательно, u и v аналитичны в полной окрестности нуля.

В следующих параграфах нам придется иметь дело с нелинейными системами и граничными условиями. Для проверки эллиптичности и коэрцитивности таких систем удобно иметь критерий, который достаточно применить в одной точке. В оставшейся части параграфа доказано, что система с согласованным выбором весов, которая эллиптична и коэрцитивна в «одной точке», в действительности эллиптична и коэрцитивна в смысле определений 3.1 и 3.2 в окрестности $\Omega\subset\mathbb{R}^N_+$ и $S=\overline{\Omega}\cap\{y_N=0\}$.

Напомним, что рассматривается система уравнений

$$F_k(y,\ Du^1,\ \dots,\ Du^n)=0,\quad y\in\Omega,\quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{3.5}$$

ей соответствует система уравнений в вариациях

$$\sum_1^n L_{kj}(y,\ D)\,\bar u^j=\frac{d}{dt}F(y,\ D(u^1+t\bar u^1),\ \dots,\ D(u^n+t\bar u^n))\Big|_{t=0}=$$
$$=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{3.6}$$

и граничные условия

$$\Phi_h(y,\ Du^1,\ \dots,\ Du^n)=0,\quad y\in S,\quad 1\leqslant h\leqslant\mu, \tag{3.9}$$

с уравнениями в вариациях

$$\sum_1^n B_{hj}(y,\ D)\,\bar u^j=\frac{d}{dt}\Phi_h(y,\ D(u^1+t\bar u^1),\ \dots,\ D(u^n+t\bar u^n))\Big|_{t=0}=$$
$$=0,\quad 1\leqslant h\leqslant\mu. \tag{3.10}$$

Предположим, что s_j, t_k, r_h, $1\leqslant j$, $k\leqslant n$, $1\leqslant h\leqslant\mu$, — согласованное множество весов этой системы. Предположим, что 0 является внутренней точкой множества S.

---

[1]) В оригинале: transmission problem. — *Прим. ред.*

Теорема 3.5. *Пусть* $u^1, \ldots, u^n$ — *решение задачи* (3.5), (3.9) *в* $\Omega \cup S$ *и* F_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, Φ_h, $1 \leqslant h \leqslant \mu$, — *аналитические функции от* y, $u^1, \ldots, u^n$ *и производных от* u^j *для* $y \in \Omega \cup S$. *Предположим, что* $u^j \in C^{t_j + r_0}(\Omega \cup S)$, $r_0 = \max\limits_h (0, 1 + r_h)$. *Тогда если уравнения в вариациях* (3.6), (3.10) *эллиптичны и коэрцитивны при* $y = 0$, *то задача* (3.5), (3.9) *эллиптична и коэрцитивна на множестве* $(\Omega \cup S) \cap B_\varepsilon(0)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Доказательство начнем со следующей леммы.

Лемма 3.6. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.5. *Тогда система* (3.5) *эллиптична на множестве* $(\Omega \cup S) \cap B_\varepsilon(0)$.

Доказательство. Коэффициенты операторов $L_{kj}(y, D)$ непрерывны на $\Omega \cup S$. Поэтому если

$$\operatorname{rank}(L'_{kj}(y, \xi)) = n \quad \text{для} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.21}$$

при $y = 0$, то это же свойство справедливо, если $y \in \Omega \cup S$ и величина $|y|$ мала.

Предположим теперь, что при $y = 0$ многочлен

$$P(y, \xi + z\eta) = \det(L'_{kj}(y, \xi + z\eta)) \tag{3.22}$$

имеет точно $\mu = \frac{1}{2} \deg P$ корней с положительной мнимой частью и $\mu = \frac{1}{2} \deg P$ корней с отрицательной мнимой частью для каждой пары независимых векторов ξ, $\eta \in \mathbb{R}^N$. Так как $P(y, \xi)$ — однородный многочлен по ξ степени $m = 2\mu = \sum (s_j + t_j)$, то равенство $P(y, \xi + z\eta) = 0$ имеет место в том и только том случае, если $P\left(y, \frac{\xi}{|\xi|} + z\frac{|\eta|}{|\xi|}\frac{\eta}{|\eta|}\right) = 0$. Следовательно, условие о корнях многочлена $P(y, \xi + z\eta)$ выполняется для произвольных векторов ξ и η тогда и только тогда, когда оно выполняется для независимых единичных векторов ξ, η. Поэтому из простых соображений непрерывности следует, что если (3.22) выполнено для $y = 0$, то это соотношение справедливо для $y \in \Omega \cup S$, когда $|y|$ мало. ∎

Чтобы показать, что свойство коэрцитивности также выполняется на открытом множестве, используем соображения, основанные на теореме об обратном операторе в гильбертовом пространстве. Это доказательство, во-первых, достаточно элементарно, а во-вторых, имеет то преимущество, что демонстрирует ряд идей, лежащих в основе изучения эллиптических граничных задач.

Лемма 3.7. *Предположим, что система* (3.6) *эллиптична при* $y = y_0$. *Тогда для любого* k *существует хотя бы одно* j, *такое что степень по* ξ_N *многочлена* $L'_{kj}(y_0, \xi)$ *равна* $s_k + t_j$.

Доказательство. Эта лемма элементарна. Очевидно, степень по ξ_N многочлена $L'_{kj}(y_0, \xi)$, обозначим ее $\deg_N L'_{kj}(y_0, \xi)$, не превышает

s_k+t_j. Предположим, что для некоторого l выполнено неравенство $\deg_N L'_{lj}(y_0, \xi)<s_l+t_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. Мы можем вычислить определитель $P(y_0, \xi)$, разлагая его по l-й строке. Ясно, что алгебраическое дополнение $L^{lj}(y_0, \xi)$ элемента $L'_{lj}(y_0, \xi)$ есть однородный полином степени $\sum\limits_{k\neq l} s_k+\sum\limits_{h\neq j} t_h$. Поэтому из соотношения

$$P(y_0, \xi)=\sum_j L'_{lj}(y_0, \xi)L^{lj}(y_0, \xi)$$

следует неравенство

$$\deg_N P(y_0, \xi)\leqslant\max_j\Big(\deg_N L'_{lj}(y_0, \xi)+\sum_{k\neq l} s_k+\sum_{h\neq j} t_h\Big)<$$
$$<s_l+t_j+\sum_{k\neq l} s_k+\sum_{h\neq j} t_h=m.$$

Следовательно, многочлен $P(y_0, (\xi', 0)+z(0, 1))$ не может иметь m корней, что противоречит предположению о коэрцитивности из определения эллиптичности. ∎

Удобно ввести понятие коэрцитивности системы обыкновенных дифференциальных уравнений, означающее просто-напросто выполнение длинного списка условий.

Определение 3.8. Система обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_1^n p_{kj}(D_t)v^j(t)=f_k(t),\quad 0<t<\infty,\quad 1\leqslant k\leqslant n,\tag{3.23}$$

$$\sum_1^n q_{hj}(D_t)v^j(0)=a_h,\quad 1\leqslant h\leqslant\mu,\tag{3.24}$$

где $D_t=-id/dt$, снабженная весами s_k, t_j, r_h, называется *коэрцитивной*, если выполнены следующие условия:

(i) $\deg p_{kj}(\tau)\leqslant s_k+t_j$, $\deg q_{hk}(\tau)\leqslant r_h+t_j$, $1\leqslant k$, $j\leqslant n$, $1\leqslant h\leqslant\mu$;

(ii) для каждого k существует хотя бы одно j, такое что $\deg p_{kj}(\tau)=s_k+t_j$;

(iii) $p(\tau)=\det(p_{kj}(\tau))$ — многочлен степени $m=\sum(s_j+t_j)=2\mu$, имеющий точно μ корней с положительной мнимой частью и μ корней с отрицательной мнимой частью;

(iv) единственным решением $(v^1, \ldots, v^n)$ однородной системы (3.23), (3.24), ограниченным при $t>0$, является $v^1=\ldots=v^n=0$.

Как обычно, $p_{kj}=0$, если $s_k+t_j<0$, и т. д.

Если задача (3.5), (3.9) коэрцитивна на функции u в точке y_0, то очевидно, что при каждом $0\neq\xi'\in\mathbb{R}^{N-1}$ система

$$\sum L'_{kj}(y_0, \xi', D_t)v^j(t)=f_k(t),\quad 0<t<\infty,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$
$$\sum B'_{hj}(y_0, \xi', D_t)v^j(0)=a_h,\quad 1\leqslant h\leqslant\mu,$$

является коэрцитивной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь решение произвольной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{1}^{n} P_{kj}(D_t)\, v^j(t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.25}$$

Заметим, что $\det(P_{kj}(D_t))\, v^l(t) = 0$ для любого l, $1 \leqslant l \leqslant n$, и, следовательно, размерность ядра оператора (3.25) конечна. Для проверки утверждения надо умножить матрицу $(P_{kj}(D_t))$ слева на ее присоединенную матрицу[1]).

Под $H^\sigma(\mathbb{R}_+)$ понимается замыкание пространства комплексно-значных функций из $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ по норме пространства H^σ. Скалярное произведение в $H^\sigma(\mathbb{R}_+)$ определим с помощью соотношения

$$(u, v)_{H^\sigma(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty \left[u(t)\overline{v(t)} + D_t^\sigma u(t)\, \overline{D_t^\sigma v(t)}\right] dt, \quad u, v \in H^\sigma(\mathbb{R}_+).$$

Пусть дана коэрцитивная система (3.23), (3.24); для любого $\sigma \geqslant 0$ оператор

$$p_{kj}(D_t)\colon\ H^{t_j+\sigma}(\mathbb{R}_+) \to H^{-s_k+\sigma}(\mathbb{R}_+), \quad 1 \leqslant k,\ j \leqslant n,$$

непрерывен, и, в силу (ii), можно утверждать, что оператор

$$H^{t_1+\sigma}(\mathbb{R}_+) \times \ldots \times H^{t_n+\sigma}(\mathbb{R}_+) \to H^{-s_k+\sigma}(\mathbb{R}_+),$$
$$(v^1, \ldots, v^n) \to \sum_j p_{kj}(D_t)\, v^j$$

также непрерывен. Напомним, что «оператор следа»

$$H^\sigma(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{C}, \quad v \to D^{\sigma-1} v(0)$$

непрерывен. Следовательно, оператор

$$q_{kj}(D_t)\colon\ H^{t_j+\sigma}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{C}, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$
$$v \to q_{hj}(D_t)\, v(0)$$

непрерывен для любых h, j, если $\sigma \geqslant r_0 = \max_h (r_h + 1, 0)$. Введем обозначения. Положим

$$V = H^{t_1+r_0}(\mathbb{R}_+) \times \ldots \times H^{t_n+r_0}(\mathbb{R}_+),$$
$$W = H^{r_0-s_1}(\mathbb{R}_+) \times \ldots \times H^{r_0-s_k}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\mu$$

и определим непрерывное линейное отображение

$$T\colon\ V \to W \tag{3.26}$$

---

[1]) То есть на матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы $(P_{kj}(D))$. — *Прим. перев.*

с помощью равенства $Tv=f$, где $v=(v^1, \ldots, v^n) \in V$ и $f=(f_1, \ldots$
$\ldots, f_n, a_1, \ldots, a_\mu) \in W$, если

$$\sum_1^n p_{kj}(D_t)\, v^j(t) = f_k(t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\sum_1^n q_{hj}(D_t)\, v^j(0) = a_h, \qquad 1 \leqslant h \leqslant \mu.$$

Лемма 3.9. *Для оператора* T: $V \to W$, *определенного в* (3.26), $\ker T = \{0\}$ *и размерность коядра* T *конечна.*

Доказательство. Первая часть утверждения является частью (iv) определения коэрцитивной системы. Действительно, любое решение ζ однородного уравнения (3.23) имеет компоненты $\zeta^j(t)$, которые удовлетворяют уравнению

$$p(D_t)\, \zeta^j(t) = 0, \qquad 0 < t < \infty, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где $p(\tau) = \det(p_{kj}(\tau))$ [см. (3.25)]. Следовательно, $\zeta^j(t)$ ограничено при $t > 0$ в том и только том случае, если оно принадлежит любому $H^\sigma(\mathbb{R}_+)$, так как $\tau = 0$ не является корнем многочлена $p(\tau)$.

Пусть теперь $f=(f_1, \ldots, f_n, a_1, \ldots, a_\mu) \in \operatorname{coker} T$. Это значит, что для всех $v=(v^1, \ldots, v^n) \in V$

$$(Tv, f) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \left[\sum_{j=1}^n p_{kj}(D_t)\, v^j \bar{f}_k + D_t^{r_0 - s_k} \sum_{j=1}^n p_{kj}(D_t)\, v^j\, \overline{D^{r_0 - s_k} f_k} \right] dt +$$
$$+ \sum_{h=1}^{\mu} \sum_{j=1}^n q_{hj}(D_t)\, v^j(0)\, \bar{a}_h = 0.$$

Возьмем, в частности, $v^j \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\infty \left[\sum_1^n p_{kj}(D_t)\, v^j \bar{f}_k + D_t^{r_0 - s_k} \sum_{j=1}^n p_{kj}(D_t)\, v^j\, \overline{D^{r_0 - s_k} f_k} \right] dt = 0. \tag{3.27}$$

Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Действительно, каждая $f_k(t)$ является пределом в $H^{-s_k + r_0}(\mathbb{R}_+)$ последовательности $\varphi_\varepsilon * f_k(t)$ при $\varepsilon \to 0$, где φ_ε — последовательность симметрических сглаживателей[1]) с компактным носителем. Заменяя f_k на $\varphi_\varepsilon * f_k$ и преобразуя интегралы в (3.27), получим (3.27) с исходными f_k и новыми пробными функциями $\varphi_\varepsilon * v^j \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Законность этого основана, конечно, на том, что оператор $p_{kj}(D_t)$ имеет постоянные коэффициенты.

---

[1]) То есть функций вида $\varphi_\varepsilon = \varphi(x/\varepsilon)/\varepsilon$, где $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\int \varphi(t)\, dt = 1$, φ — четная функция. — *Прим. перев.*

Интегрируя по частям в (3.27) и перенося все производные на f_k, получим, что

$$\sum_j \int_0^\infty v_j \sum_{k=1}^n \overline{\left[\left(1+D_t^{2r_0-2s_k}\right) p_{kj}(D_t) f_k\right]}\, dt = 0, \quad v^j \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+),$$

и поэтому $f_1, \ldots, f_n$ являются решениями системы

$$\sum_{k=1}^n \left(1+D_t^{2r_0-2s_k}\right) p_{kj}(D_t) f_k(t) = 0, \quad 0<t<\infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Как отмечалось выше, размерность этого пространства решений конечна, скажем M. Следовательно,

$$\dim \operatorname{coker} T \leqslant M + \dim \mathbb{C}^\mu = M + \mu. \ \blacksquare$$

Теорема 3.10. *Пусть* (3.23), (3.24) — *коэрцитивная система. Тогда для любого решения* $v^j \in H^{r_0+t_j}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *задачи*

$$\sum p_{kj}(D_t) v^j = f_k, \quad 0<t<\infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\sum q_{hj}(D_t) v^j(0) = a_h, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu,$$

справедлива оценка

$$\sum_1^n \| v^j \|_{H^{t_j+r_0}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \left[\sum_1^n \| f_k \|_{H^{r_0-s_k}(\mathbb{R}_+)} + \sum_1^\mu | a_j | \right]$$

с константой $C>0$, *не зависящей от* v^j.

Доказательство. Отображение T, определенное в (3.26), взаимно однозначно и, согласно последней лемме, имеет конечномерное коядро E. Поэтому T определяет непрерывный изоморфизм $\tilde{T}\colon V \to W/E$. В силу теоремы об обратном операторе, оператор $\tilde{T}^{-1}$ непрерывен. Следовательно, если $Tv=f$ и $[f]$ — класс эквивалентности в W/E, соответствующий f, то

$$\| v \|_V \leqslant C \| [f] \|_{W/E} \leqslant C \inf_{g \in E} \| f+g \|_W \leqslant C \| f \|_W$$

при некотором $C>0$, так как $g=0 \in E$. Это доказывает теорему. $\blacksquare$

Окончание доказательства теоремы 3.5. Так как $t_j+s_k \leqslant r_0+t_j$, $1 \leqslant j$, $k \leqslant n$, и $r_h+t_j \leqslant r_0+t_j$, $1 \leqslant h \leqslant \mu$, $1 \leqslant j \leqslant n$, то линеаризованные уравнения (3.6), (3.10) имеют непрерывные коэффициенты. В силу леммы 3.6, система эллиптична в окрестности $y=0$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений при фиксированном $0 \neq \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$:

$$\sum_1^n L'_{kj}(y', \xi', D_t) v^j(t) = f_k(t), \quad 0<t<\infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.28}$$

$$\sum_1^n B'_{hj}(y', \xi', D_t) v^j(0) = a_h, \quad 1 \leqslant h \leqslant \mu. \tag{3.29}$$

Нам остается проверить справедливость части (iv) определения 3.8 для этой системы при малом $|y'|$. В силу непрерывности коэффициентов операторов L'_{kj}, B'_{hk}, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|y'| < \delta$ коэффициенты при τ^l многочленов $L'_{kj}(y', \xi', \tau)$ и $p_{kj}(\tau)$ для любого l различаются меньше чем на $\varepsilon > 0$; то же самое верно для коэффициентов при τ^l многочленов $B'_{hj}(y', \xi', \tau)$ и $q_{hj}(\tau)$, где $p_{kj}(\tau) = L'_{kj}(0, \xi', \tau)$, $q_{hj}(\tau) = B'_{hj}(0, \xi', \tau)$. Следовательно, в силу предыдущей теоремы, решение $v \in V$ задачи (3.28), (3.29) удовлетворяет неравенству

$$\sum_j \|v^j\|_{H^{t_j + r_0}(\mathbb{R}_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\sum_1^n \|f_k\|_{H^{r_0 - s_k}(\mathbb{R}_+)} + C'\varepsilon \sum_1^n \|v^j\|_{H^{t_j + r_0}(\mathbb{R}_+)} + \sum_1^\mu |a_h|\right].$$

Поэтому для достаточно малого ε

$$\sum_1^n \|v^j\|_{H^{t_j + r_0}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C'' \left[\sum_1^n \|f_k\|_{H^{r_0 - s_k}(\mathbb{R}_+)} + \sum_1^\mu |a_h|\right]$$

для функций v^j, f_k, удовлетворяющих (3.28), (3.29). В частности, любое ограниченное экспоненциальное решение однородных уравнений (3.28), (3.29) равно нулю. ∎

4. ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ

Наши приложения к задачам со свободной границей начинаются с системы, возникающей при изучении ограниченных плазменных конфигураций в физике. Она напоминает задачу сопряжения (3.19). Предположим, что Γ — гиперповерхность класса C^1 в шаре $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, проходящая через $x = 0$ и разделяющая $B_1(0)$ на две части Ω^+ и Ω^-. Предположим, что нормалью к Γ в 0, направленной в Ω^+, является $(0, \ldots, 0, 1)$. Допустим, что $u \in C^1(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{array}{llll} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{в} \quad \Omega^+, & u = 0, & \\ \Delta u = 0 & \text{в} \quad \Omega^-, & \partial u/\partial \nu \neq 0 & \end{array} \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (4.1)$$

где $\lambda(x)$ — аналитическая функция от $x \in \overline{B_1(0)}$.

Теорема 4.1. *Пусть u — решение задачи* (4.1). *Тогда Γ — аналитическая гиперповерхность.*

Доказательство. Применим в этой ситуации преобразование годографа (2.8) нулевого порядка. Предположим, что $u > 0$ в Ω^+ и

$u<0$ в Ω^-. Тогда отображение

$$\begin{aligned} &y_\sigma = x_\sigma, \quad \sigma < N, \\ &y_N = u(x), \end{aligned} \qquad x \in B_1(0) \tag{4.2}$$

взаимно однозначно отображает шар $B_\varepsilon(0)$ на окрестность U точки $y=0$. Можно считать, что (4.2) взаимно однозначно отображает на U шар $B_1(0)$. Тогда (4.2) отображает Ω^+ на $U^+=\{y\in U \mid y_N>0\}$, Ω^- на $U^-=\{y\in U \mid y_N<0\}$ и Γ на $S=\{y\in U \mid y_N=0\}$. Как и раньше, определим

$$\psi(y)=x_N, \quad y\in U, \quad x\in B_1(0).$$

Вследствие (2.13)

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\psi_N}\sum \psi_{\sigma\sigma}+\frac{2}{\psi_N^2}\sum \psi_\sigma\psi_{\sigma N}-\frac{1}{\psi_N^3}\left(1+\sum \psi_\sigma^2\right)\psi_{NN}+\lambda(y',\psi)\,y_N=0 \text{ в } U^+, \\ -\frac{1}{\psi_N}\sum \psi_{\sigma\sigma}+\frac{2}{\psi_N^2}\sum \psi_\sigma\psi_{\sigma N}-\frac{1}{\psi_N^3}\left(1+\sum \psi_\sigma^2\right)\psi_{NN}=0 \text{ в } U^-, \\ \psi\in C^1(U^+\cup S\cup U^-). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Как обычно, суммирование ведется по σ, $1\leqslant\sigma\leqslant N-1$. Задача (4.3) напоминает задачу сопряжения, и мы исследуем ее аналогичным образом. Положим

$$\varphi(y)=\psi(y', -y_N), \quad y\in U^+,$$

что приводит к системе в U^+

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\psi_N}\sum \psi_{\sigma\sigma}+\frac{2}{\psi_N^2}\sum \psi_\sigma\psi_{\sigma N}-\frac{1}{\psi_N^3}\left(1+\sum \psi_\sigma^2\right)\psi_{NN}+\lambda(y'\ \psi)\,y_N=0, \\ -\frac{1}{\varphi_N}\sum \varphi_{\sigma\sigma}+\frac{2}{\varphi_N^2}\sum \varphi_\sigma\varphi_{\sigma N}-\frac{1}{\varphi_N^3}\left(1+\sum \varphi_\sigma^2\right)\varphi_{NN}=0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

с граничными условиями

$$\varphi-\psi=0, \quad \varphi_N+\psi_N=0 \quad \text{на} \quad S. \tag{4.5}$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что эта система коэрцитивна. В силу локального критерия из теоремы 3.5, достаточно это проверить лишь при $y=0$. В силу выбора координат,

$$\psi_N(0)=\frac{1}{u_N(0)}>0, \quad \psi_\sigma(0)=-\frac{u_\sigma(0)}{u_N(0)}=0, \quad 1\leqslant\sigma\leqslant N-1,$$

поэтому линеаризованные уравнения для (4.4) с обычными весами $s_1=s_2=0$, $t_1=t_2=2$ записываются для вариаций $\bar\psi$, $\bar\varphi$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\sigma \bar\psi_{\sigma\sigma}+a\bar\psi_{NN}=0, \\ &\sum_\sigma \bar\varphi_{\sigma\sigma}+a\bar\varphi_{NN}=0 \end{aligned}\right\} \text{ в } \mathbb{R}^N_+, \tag{4.6}$$

где $a = u_N^2(0) > 0$. Линеаризованные граничные условия имеют вид

$$\bar{\varphi} - \bar{\psi} = 0, \quad \bar{\varphi}_N + \bar{\psi}_N = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^{N-1}. \tag{4.7}$$

Легко видеть, что у задачи (4.6), (4.7) нет ограниченных экспоненциальных решений, и поэтому система (4.4), (4.5) коэрцитивна. ∎

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СОВПАДАЮЩИМИ ДАННЫМИ КОШИ

Пусть нам даны решения двух эллиптических дифференциальных уравнений, определенные в одной области с совпадающими данными Коши на части границы. Что можно сказать об этой части границы? Здесь мы обсудим на простейших примерах аналог системы (3.13) и теоремы 3.4 для задач со свободными границами.

Рассматриваемая задача имеет определенный самостоятельный интерес. Кроме того, она послужит подготовкой для изучения свободных границ, появляющихся в вариационном неравенстве для двух мембран и в вариационных неравенствах высшего порядка. Чтобы выявить переопределенный характер задачи со свободной границей, не вдаваясь по возможности в технические детали, будем предполагать, что различные величины обладают достаточно большой исходной гладкостью.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область, граница которой около $0 \in \partial\Omega$ является гладкой гиперповерхностью Γ, проходящей через $x = 0$, с внутренней нормалью в точке $x = 0$, равной $(0, \ldots, 0, 1)$. Пусть

$$\begin{matrix} \Delta u^1 + \lambda u^1 = f_1, \\ \Delta u^2 = f_2 \end{matrix} \quad \text{в } \Omega, \tag{5.1}$$

$$u^1 = u^2 = 0, \quad \frac{\partial u^1}{\partial \nu} = \frac{\partial u^2}{\partial \nu} \text{ на } \Gamma, \tag{5.2}$$

где f_1, f_2 — аналитические функции в окрестности $\Omega \cup \Gamma$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Знать только, что $u^1 = u^2$, недостаточно.

Мы рассмотрим два случая этой задачи, предлагая в каждом свой выбор переменных, определенных в терминах $w(x) = u^1(x) - u^2(x)$. В первом случае мы предполагаем, что $f_1(0) - f_2(0) \neq 0$. Тогда будет применимо преобразование годографа первого порядка, приводящее к коэрцитивной эллиптической системе. Во втором случае мы предполагаем, что $f_1 \equiv f_2$. Это приведет к задаче четвертого порядка для одной функции w, которая после соответствующих преобразований также сведется к эллиптической системе, отличающейся, правда, от системы в первом случае.

Теорема 5.1. *Пусть* u^1, u^2 — *решение задачи* (5.1), (5.2), *причем* $f_1(0) \neq f_2(0)$. *Тогда* Γ *аналитична около* $x = 0$.

Доказательство. Положив $w=u^1-u^2$, запишем (5.1), (5.2) в виде

$$\left.\begin{aligned}\Delta w+\lambda(w+u^2)&=f_1-f_2,\\ \Delta u^2&=f_2\end{aligned}\right\}\ \text{в } \Omega, \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{aligned}u^2=w&=0,\\ \partial w/\partial\nu&=0\end{aligned}\right\}\ \text{на } \Gamma. \tag{5.4}$$

В силу граничных условий для w, $w_i=0$ на Γ, $1\leqslant i\leqslant N$. Введем преобразование годографа

$$y=(x,\ -w_N),\quad x\in\Omega\cup\Gamma, \tag{5.5}$$

и новые зависимые переменные

$$\left.\begin{aligned}v^1(y)&=x_Ny_N+w(x),\\ v^2(y)&=u^2(x),\end{aligned}\right\}\ x\in\Omega\cup\Gamma. \tag{5.6}$$

Так как нормаль к Γ в точке $x=0$ имеет направление оси x_N, то

$$w_{i\sigma}(0)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant N,\quad 1\leqslant\sigma\leqslant N-1, \tag{5.7}$$

и поэтому $w_{NN}(0)=f_1(0)-f_2(0)\neq 0$. Предполагая, что $w_{NN}(0)<0$, получим, что (5.5) отображает окрестность $x=0$ в Ω, которую мы можем считать совпадающей с Ω, на область $U\subset\{y\mid y_N>0\}$ и отображает Γ на часть гиперплоскости $y_N=0$. Согласно (2.7), v^1 удовлетворяет нелинейному уравнению второго порядка, которое мы выпишем позже (см. (5.8)).

Остановимся на уравнении для $v^2(y)$. Согласно (2.6),

$$\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}u^2=\frac{1}{v^1_{NN}}\partial_N\left(\frac{1}{v^1_{NN}}\partial_Nv^2\right)=\left(\frac{1}{v^1_{NN}}\right)^2\partial_N^2v^2+\frac{\partial_Nv^2}{v^1_{NN}}\partial_N\left(\frac{1}{v^1_{NN}}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma^2}u^2=\left(\partial_\sigma-\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\partial_N\right)^2v^2=\partial_\sigma^2v^2-2\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\partial_\sigma\partial_Nv^2+\left(\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\right)^2\partial_N^2v^2+$$
$$+\partial_Nv^2\left[\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\partial_N\left(\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\right)-\partial_\sigma\left(\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\right)\right].$$

Таким образом, очевидно, что наше уравнение, будучи по v^2 второго порядка, по v^1 имеет 3-й порядок. Поэтому при выборе весов необходима аккуратность! Наша новая система для v^1, v^2 имеет вид [см. (2.7)]

$$-\frac{1}{v^1_{NN}}-\frac{1}{v^1_{NN}}\sum(v^1_{N\sigma})^2+\sum v^1_{\sigma\sigma}+\lambda v^2=$$
$$=f_1(v^1_N,\ y')-f_2(v^1_N,\ y')+\lambda(y_Nv^1_N-v^1)\ \text{в } U, \tag{5.8}$$

$$\partial_Nv^2\left\{\sum\left[\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\partial_N\left(\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\right)-\partial_\sigma\left(\frac{v^1_{\sigma N}}{v^1_{NN}}\right)\right]+\frac{1}{v^1_{NN}}\partial_N\left(\frac{1}{v^1_{NN}}\right)\right\}+$$
$$+\sum\left[\partial_\sigma^2v^2-2\frac{v^1_{N\sigma}}{v^1_{NN}}\partial_\sigma\partial_Nv^2+\left(\frac{v^1_{\sigma N}}{v^1_{NN}}\right)^2\partial_N^2v^2\right]+\left(\frac{1}{v^1_{NN}}\right)^2\partial_N^2v^2=$$
$$=f_2(v^1_N,\ y')-\lambda v^2\ \text{в } U, \tag{5.9}$$

$$v^1=0,\quad v^2=0\quad \text{на}\quad S. \tag{5.10}$$

Суммирование выше проводится по σ, $1\leqslant\sigma\leqslant N-1$.

Выберем веса $s_1=-2$, $s_2=0$, $t_1=4$, $t_2=2$, $r_1=-4$ и $r_2=-2$. В этом случае $t_1+s_2=4$, и поэтому главный символ не будет содержать третьих производных от v^1.

Для завершения доказательства остается показать, что система (5.8), (5.9), (5.10) эллиптична и коэрцитивна относительно выбранных весов. Согласно принципу локализации, достаточно это проверить при $y=0$, где можно считать $v^1_{NN}(0)=-1/w_{NN}(0)=1$ и, в силу (5.7), $v^1_{i\sigma}(0)=0$, $1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant\sigma\leqslant N-1$. Для вариаций $\bar{v}^1$ и $\bar{v}^2$ мы получим систему

$$\begin{aligned}\Delta\bar{v}^1+\lambda\bar{v}^2=0,\\ \Delta\bar{v}^2=0\end{aligned}\quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \tag{5.11}$$

$$\bar{v}^1=\bar{v}^2=0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{N-1}. \tag{5.12}$$

Главным символом (5.11) является матрица

$$\begin{pmatrix}-\xi^2 & \lambda\\ 0 & -\xi^2\end{pmatrix}$$

ранга 2; следовательно, система эллиптична. Легко проверить, что задача (5.11), (5.12) не имеет ограниченных экспоненциальных решений. Поэтому, в силу теоремы 3.3, v^1 и v^2 аналитичны в $U\cup S$, а значит, из представления Г: $x_N=v^1_N(x', 0)$, $(x', 0)\in S$ (см. (2.17)), следует аналитичность Г. ∎

Обратимся теперь к обсуждению задачи (5.1), (5.2) с $f_1(x)=f_2(x)$. Тогда (5.3) записывается в более сжатом виде

$$\begin{aligned}\Delta w+\lambda(w+u^2)=0,\\ \Delta u^2=f_2\end{aligned}\quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Применяя оператор Δ к первому уравнению и подставляя полученное выражение для Δu^2 во второе, будем иметь

$$\Delta^2 w+\lambda\Delta w=-\lambda f_2 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.14}$$

Для исследования поведения w на Г установим следующую элементарную лемму.

Лемма 5.2. *Пусть w, u^2 — решение системы* (5.13) *с граничными условиями*

$$u^2=w=w_i=0 \ \text{на} \quad \Gamma, \quad 1\leqslant i\leqslant N.$$

Тогда $w_{ij}(x)=0$ на Г при $1\leqslant i,\ j\leqslant N$.

Заметим, что условия на Г совпадают с (5.4).

Доказательство. В заданной точке $x^0\in\Gamma$ выберем координаты $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с осью ξ_N, ортогональной к Г в x^0. Так как $w_{x_i}=0$ на Г для любого i, то $w_{\xi_i}=0$ на Г для всех i и поэтому

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_i\,\partial\xi_\sigma}(x^0)=0 \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant N, \quad 1\leqslant\sigma\leqslant N-1.$$

В силу (5.13),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_N^2}(x^0) = -\lambda[w(x^0) + u^2(x^0)] - \sum_\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_\sigma^2}(x^0) = 0,$$

что доказывает лемму. ▮

Наше новое преобразование основано на выборе $-w_{NN}$ в качестве новой независимой переменной. Чтобы в дальнейшем все было обосновано, предположим, что $\lambda \neq 0$ и $\partial u^2/\partial \nu(0) = \partial u^1/\partial \nu(0) \neq 0$. Докажем сначала теорему в терминах системы (5.1), (5.2), а затем в терминах одной функции w.

Теорема 5.3. *Пусть u^1, u^2 — решение задачи*

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^1 + \lambda u^1 &= f, \\ \Delta u^2 &= f \end{aligned}\right\} \quad \text{в } \Omega, \tag{5.15}$$

$$\left.\begin{aligned} u^1 = u^2 &= 0, \\ \partial u^1/\partial \nu &= \partial u^2/\partial \nu \end{aligned}\right\} \quad \text{на } \Gamma, \tag{5.16}$$

где f — аналитическая функция в окрестности $x = 0$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\lambda \neq 0$ и $\partial u^1/\partial \nu(0) \neq 0$. Тогда Γ аналитична в окрестности $x = 0$.

Доказательство. Сведем доказательство этой теоремы к доказательству теоремы, приведенной ниже. Положив, как обычно, $w = u^1 - u^2$, получим, что $\Delta^2 w + \lambda \Delta w = -\lambda f$ в Ω, и, в силу леммы 5.2, $D^\alpha w = 0$ на Γ для любого мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant 2$. Заметим теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial x_N}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_N\, \partial x_j} w(0) = 0$$

для любых $i + j < 2N$, так как $(\partial^2/\partial x_N\, \partial x_j)\, w = 0$ на Γ. Следовательно в силу (5.13),

$$\frac{\partial^3}{\partial x_N^3} w(0) = -\lambda\left[\frac{\partial w}{\partial x_N}(0) - \frac{\partial u^2}{\partial x_N}(0)\right] - \sum_\sigma \frac{\partial^3 w}{\partial x_N\, \partial x_\sigma^2}(0) = \lambda \frac{\partial u^2}{\partial x_N}(0) \neq 0.$$

Теорема 5.4. *Пусть $w \in C^4(\Omega \cup \Gamma)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w = g \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5.17}$$

$$D^\alpha w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \text{ для } |\alpha| \leqslant 2,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x_N^3} w(0) \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{5.18}$$

где λ и g — аналитические функции в окрестности $x = 0$. Тогда поверхность Γ аналитична около $x = 0$.

Доказательство. Напомним, что ось x_N ортогональна к Γ в точке $x = 0$. В силу (5.18), отображение

$$y = (x', \; -w_{NN}(x)), \quad x \in \Omega, \tag{5.19}$$

взаимно однозначно в окрестности нуля в Ω, за которую, как обычно, мы принимаем всю область Ω, и отображает ее на область U, которую можно считать принадлежащей полупространству $y_N > 0$. При этом гиперповерхность Γ отображается на часть S гиперплоскости $y_N = 0$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi^1(y) &= x_N y_N + w_N(x), \\ \varphi^2(y) &= \sum_{\sigma \leqslant N-1} w_{\sigma\sigma}(x) \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Определим из (5.17) уравнения для φ^1 и φ^2. Так как φ^1 — это просто преобразование Лежандра функции w_N относительно (5.19), то

$$\varphi^1_\sigma = w_{\sigma N}, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1; \quad \varphi^1_N = x_N,$$

где, как обычно, нижний индекс у φ^i означает дифференцирование по переменным y, а у w — дифференцирование по x. Кроме того,

$$w_{NNN} = -1/\varphi^1_{NN}, \quad w_{NNNN} = \varphi^1_{NNN}/(\varphi^1_{NN})^3,$$

$$w_{NN\sigma\sigma} = (\varphi^1_{N\sigma}/\varphi^1_{NN})_\sigma - (\varphi^1_{N\sigma}/\varphi^1_{NN})(\varphi^1_{N\sigma}/\varphi^1_{NN})_N, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1.$$

Далее,

$$\sum_{\sigma<N} w_{\sigma\sigma\tau} = \varphi^2_\tau - (\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})\varphi^2_N \quad 1 \leqslant \tau \leqslant N-1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma<N} w_{\sigma\sigma\tau\tau} = \varphi^2_{\tau\tau} - 2(\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})\varphi^2_{N\tau} + (\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})^2\varphi^2_{NN} - \\ - (\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})_\tau \varphi^2_N + (\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})_N(\varphi^1_{N\tau}/\varphi^1_{NN})\varphi^2_N. \end{aligned}$$

Записав (5.17) в виде

$$w_{NNNN} + 2\sum_{\sigma<N} w_{\sigma\sigma NN} + \sum_{\sigma,\,\tau<N} w_{\sigma\sigma\tau\tau} + \lambda\left(w_{NN} + \sum_\sigma w_{\sigma\sigma}\right) = g,$$

получаем отсюда уравнение для φ^1, φ^2

$$F_1(\varphi^1, \varphi^2, y) = 0 \quad \text{в} \quad U, \tag{5.21}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\varphi^1, \varphi^2, y) = \frac{\varphi^1_{NNN}}{(\varphi^1_{NN})^3} + 2\sum_{\sigma<N}\left[\left(\frac{\varphi^1_{N\sigma}}{\varphi^1_{NN}}\right)_\sigma - \frac{\varphi^1_{N\sigma}}{\varphi^1_{NN}}\left(\frac{\varphi^1_{N\sigma}}{\varphi^1_{NN}}\right)_N\right] + \\ + \sum_{\sigma,\,\tau<N}\left[\varphi^2_{\tau\tau} - 2\frac{\varphi^1_{N\tau}\varphi^2_{N\tau}}{\varphi^1_{NN}} + \left(\frac{\varphi^1_{N\tau}}{\varphi^1_{NN}}\right)^2\varphi^2_{NN} - \left(\frac{\varphi^1_{N\tau}}{\varphi^1_{NN}}\right)_\tau\varphi^2_N + \right. \\ \left. + \left(\frac{\varphi^1_{N\tau}}{\varphi^1_{NN}}\right)_N\left(\frac{\varphi^1_{N\tau}}{\varphi^1_{NN}}\right)\varphi^2_N\right] + \lambda(\varphi^2 - y_N) - g(y', \varphi^1_N) \end{aligned} \tag{5.22}$$

в U. Второе уравнение получим, дифференцируя φ^2 двумя способами:

$$\sum_{\sigma<N} w_{\sigma\sigma N} = \varphi^2_N/\varphi^1_N,$$

$$\sum_{\sigma<N} w_{\sigma N\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\sum_{\sigma<N}\varphi^1_\sigma = \sum_{\sigma<N}\left[\varphi^1_{\sigma\sigma} - \frac{(\varphi^1_{\sigma N})^2}{\varphi^1_{NN}}\right].$$

Таким образом,

$$F_2(\varphi^1, \varphi^2) = \sum (\varphi^1_{\sigma\sigma}\varphi^1_{NN} - (\varphi^1_{N\sigma})^2) - \varphi^2_N = 0 \quad \text{в} \quad U. \tag{5.23}$$

Итак, φ^1, φ^2 — решение уравнений (5.21), (5.23), удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{5.24}$$

Выберем веса $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $t_1 = 3$, $t_2 = 2$, $r_1 = -3$ и $r_2 = -2$. При линеаризации уравнений в точке $y = 0$ заметим, что

$$\varphi^j(0) = \varphi^j_\sigma(0) = \varphi^j_{\sigma\tau}(0) = \varphi^1_{N\sigma}(0) = \varphi^2_N(0) = 0$$

для $1 \leqslant \sigma, \tau \leqslant N-1$, $j = 1, 2$. Для вариаций $\bar\varphi^1$ и $\bar\varphi^2$ получим из (5.22), (5.23), что

$$\begin{aligned} L_{11}\bar\varphi^1 + L_{12}\bar\varphi^2 &= \frac{\bar\varphi^1_{NNN}}{\varphi^1_{NN}(0)^3} + \frac{2}{\varphi^1_{NN}(0)} \sum_{\sigma<N} \bar\varphi^1_{N\sigma\sigma} + \sum_{\sigma<N} \bar\varphi^2_{\sigma\sigma} = 0, \\ L_{21}\bar\varphi^1 + L_{22}\bar\varphi^2 &= \varphi^1_{NN}(0) \sum_{\sigma<N} \bar\varphi^1_{\sigma\sigma} - \bar\varphi^2_N = 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

в $\mathbb{R}^N_+$ и

$$\bar\varphi^1 = \bar\varphi^2 = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^{N-1}. \tag{5.26}$$

Символ системы (5.25) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-i\xi^3_N}{a^3} - \dfrac{2i}{a}\sum\limits_\sigma \xi^2_\sigma\xi_N & -\sum\limits_\sigma \xi^2_\sigma \\ -a\sum\limits_\sigma \xi^2_\sigma & -i\xi_N \end{pmatrix},$$

где $a = \varphi^1_{NN}(0) \neq 0$. Определитель этой матрицы равен

$$\begin{aligned} L(\xi) &= -[(\xi^4_N/a^3) + (2/a)\sum \xi^2_N\xi^2_\sigma + a(\sum \xi^2_\sigma)^2] = \\ &= -a[(\xi^2_N/a^2) + \sum \xi^2_\sigma]^2 = -a\,|(\xi', \xi_N/a)|^4 \quad \text{для} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Следовательно, система эллиптична в окрестности $y = 0$.

Наконец, проверим коэрцитивность этой системы. Положив

$$\bar\varphi^1(y', t) = \zeta_1(t)e^{i\xi' y'}, \quad \bar\varphi^2(y', t) = \zeta_2(t)e^{i\xi' y'}, \quad 0 \neq \xi' \in \mathbb{R}^{N-1},$$

получим для ζ_1 и ζ_2 систему обыкновенных дифференциальных уравнений при $t > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^3}\right)\zeta_1''' - (2/a)|\xi'|^2\zeta_1' - |\xi'|^2\zeta_2 &= 0, \\ a|\xi'|^2\zeta_1 + \zeta_2' &= 0, \\ \zeta_1(0) = \zeta_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя в него второе, получим после умножения на a^3, что

$$\zeta_1^{(4)} - 2a^2|\xi'|^2\zeta_1'' + a^4|\xi'|^4\zeta_1 = 0.$$

Следовательно, считая, что $a>0$, получим

$$\zeta_1(t)=c_1te^{-a|\xi'|t}+c_2e^{-a|\xi'|t}.$$

В силу граничного условия, $c_2=0$. Далее,

$$0=|\xi'|^2\zeta_2(0)=(1/a)[(1/a^2)\zeta_1'''(0)-2|\xi'|^2\zeta_1'(0)]=(c_1/a)|\xi'|^2$$

и, значит, $c_1=0$. Следовательно, $\zeta_1=\zeta_2=0$. Теорема доказана. ∎

Сделаем ряд замечаний относительно предположений теорем 5.1 и 5.3. Преобразование (5.5) определено, а окончательное уравнение имеет непрерывные коэффициенты, если мы предположим только, что u^1, $u^2\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$. Однако для применения теоремы 3.3 мы должны знать, что $v^1\in C^{4,\alpha}(U\cup S)$. Из-за нашего выбора весов последнее включение может быть получено с помощью теоремы 2.1, примененной к тому из уравнений (5.3), которое содержит w. Так как

$$f_1-f_2-\lambda(w+u^2)\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup\Gamma),$$

то $w\in C^{4,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$, $\Gamma\in C^{3,\alpha}$ и преобразование $y=(x', w_N)$ и его обратное принадлежат $C^{3,\alpha}$. Так как $v_\sigma^1(y)=w_\sigma(x)$, $1\leqslant\sigma\leqslant N-1$, а $v_N^1=x_N$, то все производные функции v^1 принадлежат $C^{3,\alpha}$ и, следовательно, $v\in C^{4,\alpha}(U\cup S)$.

Аналогичным образом можно ослабить предположения теоремы 5.3. Дифференцируя уравнение для w в (5.13) по x_N, получим задачу

$$\begin{aligned}\Delta w_N+\lambda(w_N+u_N^2)&=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ w_{Ni}&=0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\ 1\leqslant i\leqslant N,\end{aligned}$$

с ограничением $w_{NNN}(0)\neq 0$, которое появляется из-за предположений теоремы 5.3. Так как w_N, $u_N^2\in C^{1,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$, то можно применить теорему 2.1. После некоторых рассуждений (упр. 13) можно заключить, что $w\in C^{4,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$, а φ^1 и φ^2, определенные в (5.20), принадлежат соответственно $C^{3,\alpha}(U\cup S)$ и $C^{2,\alpha}(U\cup S)$. На самом деле применение этих рассуждений приводит к C^∞-результату, что совсем не так в случае задачи § 6, к рассмотрению которой мы сейчас переходим.

6. ЗАДАЧА О ДВУХ МЕМБРАНАХ

В предыдущем параграфе мы выясняли, как определить поведение свободной границы, когда с одной стороны от нее задано несколько функций. Вопрос, рассматриваемый здесь, заключается в определении гладкости гиперповерхности, когда две функции заданы по одну сторону от нее, а третья функция — по другую сторону. Такое расположение функций наводит на мысль использовать, как в § 4, преобразование отражения.

Сначала мы поставим задачу, а затем покажем, как она появляется из вариационного неравенства. Пусть Γ — гладкая гиперповерхность

в $\mathbb{R}^N$, проходящая через $x=0$, с нормалью в точке $x=0$, направленной по оси x_N. Предположим, что Γ разделяет окрестность начала координат на области Ω^+ и Ω^-, причем вектор $(0, \ldots, 0, 1)$ является в $x=0$ внутренней нормалью для Ω^+. Пусть $u^1, u^2 \in C^2(\Omega^+ \cup \Gamma) \cap \cap C^2(\Omega^- \cup \Gamma) \cap C^1(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^1 + \lambda u^1 &= f_1, \\ \Delta u^2 &= f_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{в } \Omega^+, \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= u^2, \\ u_i^1 &= u_i^2 \\ \Delta u^1 + (\lambda/2)\, u^1 &= (f_1 + f_2)/2, \end{aligned}\right\} \quad \text{в } \Omega^-, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{6.2}$$

где f_1, f_2 — заданные гладкие функции в $\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Граничные условия для u^j, включенные в (6.1), (6.2), состоят в том, что u^j при переходе через Γ имеют гладкость C^1.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и $h^1, h^2 \in C^2(\partial\Omega)$ — заданные функции, причем $h^1 > h^2$. Обозначим через K выпуклое множество пар функций

$$K = \{(v^1, v^2) \mid v^2 \leqslant v^1 \text{ в } \Omega,\ v^j = h^j \text{ на } \partial\Omega \quad \text{и} \quad v^j \in H^1(\Omega), \quad j = 1, 2\}.$$

Пусть f_1, f_2 — заданные, скажем гладкие, функции на $\bar{\Omega}$, а (u^1, u^2) — решение вариационного неравенства

$$\int_\Omega [u_i^1 (v^1 - u^1)_i + u_i^2 (v^2 - u^2)_i - \lambda u^1 (v^1 - u^1)]\, dx \geqslant$$
$$\geqslant -\int_\Omega [f_1 (v^1 - u^1) + f_2 (v^2 - u^2)]\, dx \quad \text{для } (v^1, v^2) \in K. \tag{6.3}$$

Существование и свойства гладкости функции u^j являются предметом упр. 13 гл. II и упр. 5 гл. IV. Мы предположим, что $u^j \in H^{2,s}(\Omega)$, $1 \leqslant s < \infty$, и определим коинцидентное множество функций

$$I = \{x \in \Omega \mid u^1(x) = u^2(x)\}.$$

Легко проверить, что

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^1 + \lambda u^1 &= f_1, \\ \Delta u^2 &= f_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I. \tag{6.4}$$

Положим $v^1 = u^1 + \zeta$, $v^2 = u^2 + \zeta$, где $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $v^1 \geqslant v^2$ в Ω и, следовательно, $(v^1, v^2) \in K$. Подставляя эту пару (v^1, v^2) в (6.3), получим, что

$$\Delta u^1 + \Delta u^2 + \lambda u^1 = f_1 + f_2 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Поэтому из равенств $u_i^1 = u_i^2$ в I, $1 \leqslant i \leqslant N$, а также $u_{ij}^1 = u_{ij}^2$ п. в. в I получим равенство

$$\Delta u^1 + \frac{\lambda}{2} u^1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad \text{п. в. в} \quad I. \tag{6.5}$$

Из этих рассмотрений следует, что (6.4), (6.5) можно переписать в виде (6.1), (6.2) около достаточно малой части Γ границы ∂I соответствующей гладкости.

Однако далеко не очевидно, что задача (6.1), (6.2) переопределена. Действительно, отбрасывая временно уравнение в Ω^-, получим задачу

$$\begin{aligned} \Delta u^1 + \lambda u^1 &= f_1, \\ \Delta u^2 &= f_2 \end{aligned} \quad \text{в} \quad \Omega^+, \qquad \begin{aligned} u^1 &= u^2, \\ \frac{\partial u^1}{\partial \nu} &= \frac{\partial u^2}{\partial \nu} \end{aligned} \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

где ν — нормаль к Γ. Эта задача, вообще говоря, коэрцитивна и, следовательно, разрешима, когда Γ имеет лишь конечную гладкость. Очевидно, мы должны использовать информацию, заложенную в уравнение (6.2) в Ω^-. Чтобы справиться с этой трудностью, введем $w = u^1 - u^2$, $w' = u^1 + u^2$. Тогда

$$\begin{aligned} &[\Delta + (\lambda/2)]\, w + (\lambda/2)\, w' = f_1 - f_2 \quad \text{в} \quad \Omega^+, \\ &(\lambda/2)\, w + [\Delta + (\lambda/2)]\, w' = f_1 + f_2 \quad \text{в} \quad \Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-, \\ &w = w_i = 0 \quad \text{в} \quad \Gamma \cup \Omega^-, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \end{aligned} \tag{6.6}$$

В силу второго уравнения,

$$\Delta w' = f_1 + f_2 - (\lambda/2)(w' + w) \in H^{2,\, s}(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-), \quad s < \infty.$$

Вследствие теоремы о гладкости решений эллиптических уравнений

$$w' \in H^{4,\, s}(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-) \subset C^{3,\, \alpha}(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-), \quad 1 \leqslant s < \infty, \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Наложим теперь условие невырожденности

$$f_1(0) - f_2(0) - \lambda u^1(0) \neq 0. \tag{6.7}$$

Тогда w является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta w(x) = a(x, w) = f_1(x) - f_2(x) - (\lambda/2)[w'(x) + w(x)] \quad \text{в} \quad \Omega^+, \\ w = w_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \end{aligned} \tag{6.8}$$

с функцией $a(x, w)$, аналитической по w, класса $C^{3,\alpha}$ по x и удовлетворяющей условию $a(0, 0) \neq 0$. Справедлива

Лемма 6.1. *Пусть*

$$u^1, u^2 \in C^2(\Omega^+ \cup \Gamma) \cap C^2(\Omega^- \cup \Gamma) \cap C^1(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-)$$

удовлетворяют (6.1), (6.2), *где* Γ *— гиперповерхность класса* C^1. *Предположим, что выполнено условие* (6.7). *Тогда существует такая окрестность* $B_\rho(0)$, *что* $w = u^1 - u^2 \in C^{5,\alpha}((\Omega^+ \cup \Gamma) \cap B_\rho(0))$ *и* Γ *— гиперповерхность класса* $C^{4,\alpha}$ *около* $x = 0$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 2.1 к функции w, удовлетворяющей (6.8). ∎

К сожалению, этот прием не может быть повторен для доказательства включения $\Gamma \in C^\infty$.

Введем преобразование годографа первого порядка

$$y = (x', \ -w_N(x)), \quad x \in \Omega^+, \tag{6.9}$$

которое, как мы можем предположить, взаимно однозначно отображает Ω^+ на область U полупространства $y_N > 0$, а Γ — на часть S гиперплоскости $y_N = 0$. Положим

$$v(y) = x_N y_N + w(x), \quad x \in \Omega^+, \quad y \in U. \tag{6.10}$$

Обратное отображение к (6.9) задается соотношением

$$g^+(y) = (y', \ v_N(y)), \quad y \in U \cup S, \tag{6.11}$$

которое, конечно, отображает U в Ω^+. Пусть теперь C — любая константа, превышающая $\|Dv_N\|_{L^\infty(U)}$, и

$$g^-(y) = (y', \ v_N(y) - Cy_N), \quad y \in U \cup S. \tag{6.12}$$

Когда $y = (y', \ 0) \in S$, $g^-(y) = (y', \ v_N(y', \ 0)) = g^+(y) \in \Gamma$. При этом, в силу нашего выбора константы C, g^- отображает некоторую окрестность 0 в U, скажем все U, в Ω^-. Используя это новое преобразование отражения, мы определим новые зависимые переменные

$$\left.\begin{aligned} \varphi^+(y) &= w'(g^+(y)), \\ \varphi^-(y) &= w'(g^-(y)), \end{aligned}\right\} \quad y \in U \cup S. \tag{6.13}$$

Докажем, что три функции v, φ^+ и φ^- удовлетворяют коэрцитивной эллиптической системе.

Теорема 6.2. *Предположим, что*

$$u^1, \ u^2 \in C^2(\Omega^+ \cup \Gamma) \cap C^2(\Omega^- \cup \Gamma) \cap C^1(\Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-)$$

являются решением задачи (6.1), (6.2). *Пусть* f_1 *и* f_2 *аналитичны в окрестности* $x = 0$ *и*

$$f_1(0) - f_2(0) - \lambda u^1(0) \neq 0. \tag{6.7}$$

Тогда Γ *аналитична в окрестности* $x = 0$.

Доказательство. Начнем с вычисления системы уравнений для v, φ^+ и φ^-. Нашей отправной точкой является система (6.6). Справедливы соотношения, в которых $\partial_k = \partial/\partial y_k$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} &= \partial_\sigma - \frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}} \partial_N, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ \frac{\partial}{\partial x_N} &= \frac{1}{v_{NN}} \partial_N \end{aligned}\right\} \quad \text{для } x \in \Omega^+,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} &= \partial_\sigma - \frac{v_{N\sigma}}{v_{NN} - C} \partial_N, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N-1, \\ \frac{\partial}{\partial x_N} &= \frac{1}{v_{NN} - C} \partial_N \end{aligned}\right\} \quad \text{для } x \in \Omega^-.$$

Перед вычислением уравнений определим граничные условия для v, φ^+ и φ^- на $y_N=0$. Как обычно для преобразования Лежандра, $v=0$ при $y_N=0$. Так как w' непрерывна в окрестности Γ, то $\varphi^+=\varphi^-$ при $y_N=0$. Наконец, $(\partial/\partial x_N)\,w'$ непрерывна в окрестности Γ и поэтому

$$\frac{1}{v_{NN}}\partial_N\varphi^+=\frac{\partial}{\partial x_N}w'=\frac{1}{v_{NN}-C}\partial_N\varphi^- \quad \text{при} \quad y_N=0.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} v&=0,\\ \varphi^+-\varphi^-&=0 \end{aligned}\right\} \text{ на } S, \qquad \frac{1}{v_{NN}}\partial_N\varphi^+-\frac{1}{v_{NN}-C}\partial_N\varphi^-=0. \tag{6.14}$$

Первое из уравнений (6.6) преобразуется известным образом. В силу (2.7),

$$-\frac{1}{v_{NN}}-\frac{1}{v_{NN}}\sum_{\sigma<N}(v_{\sigma N})^2+\sum v_{\sigma\sigma}=F_1(v_N,\ v,\ \varphi^+,\ y) \quad \text{в} \quad U, \tag{6.15}$$

где $F_1(v_N, v, \varphi^+, y)=f_1(y', v_N)-f_2(y', v_N)-(\lambda/2)(-y_Nv_N+v+\varphi^+)$ — аналитическая функция своих аргументов.

Продолжим так же, как при доказательстве теоремы 5.1. Рассматривая второе из уравнений (6.6) и обращая внимание только на $x\in\Omega^+$, получим, как в (5.9), что

$$\begin{aligned}\partial_N\varphi^+&\left\{\sum_{\sigma<N}\left[\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}\partial_N\left(\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}\right)-\partial_\sigma\left(\frac{v_{\sigma N}}{v_{NN}}\right)\right]+\frac{1}{v_{NN}}\partial_N\left(\frac{1}{v_{NN}}\right)\right\}+\\ &+\sum_{\sigma<N}\left[\partial_\sigma^2\varphi^+-2\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}\partial_N\partial_\sigma\varphi^+-\left(\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}}\right)^2\partial_N^2\varphi^+\right]+\\ &+\left(\frac{1}{v_{NN}}\right)^2\partial_N^2\varphi^+=F_2(v_N,\ v,\ \varphi^+,\ y) \quad \text{в} \quad U,\end{aligned} \tag{6.16}$$

где

$$F_2(v_N,\ v,\ \varphi^+,\ y)=f_1(y',\ v_N)+f_2(y',\ v_N)-(\lambda/2)(-y_Nv_N+v+\varphi^+).$$

Очевидно, что F_2 — аналитическая функция своих аргументов. Заметим, что $w(x)=0$ при $x\in\Omega^-$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\partial_N\varphi^-&\left\{\sum_{\sigma<N}\left[\frac{v_{\sigma N}}{v_{NN}-C}\partial_N\left(\frac{v_{\sigma N}}{v_{NN}-C}\right)-\partial_\sigma\left(\frac{v_{\sigma N}}{v_{NN}-C}\right)\right]+\right.\\ &\left.+\frac{1}{v_{NN}-C}\partial_N\left(\frac{1}{v_{NN}-C}\right)\right\}+\sum_{\sigma<N}\left[\partial_\sigma^2\varphi^--2\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}-C}\partial_N\partial_\sigma\varphi^-+\right.\\ &\left.+\left(\frac{v_{N\sigma}}{v_{NN}-C}\right)^2\partial_N^2\varphi^-\right]+\left(\frac{1}{v_{NN}-C}\right)^2\partial_N^2\varphi^-=F_3(v_N,\ \varphi^-,\ y) \text{ в } U,\end{aligned} \tag{6.17}$$

где $F_3(v_N,\ \varphi^-,\ y)=f_1(y',\ v_N)+f_2(y',\ v_N)-(\lambda/2)\,\varphi^-$.

Зададим веса $s_1 = -2$ для (6.15) и $s_2 = s_3 = 0$ для (6.16) и (6.17), $t_v = 4$, $t_+ = 2$, $t_- = 2$ для v, φ^+ и φ^- и $r_1 = -4$, $r_2 = -2$, $r_3 = -1$ соответственно для граничных условий (6.14). При линеаризации этих уравнений при $y = 0$ предположим, что $v_{NN}(0) = a > 0$. Отметим, что $v_{N\sigma}(0) = 0$, $1 \leqslant \sigma \leqslant N - 1$. В линеаризованные уравнения не входят члены третьего порядка по v, а в линеаризацию последнего граничного условия не входят члены второго порядка по v. Для вариаций $\bar{v}$, $\bar{\varphi}^+$ и $\bar{\varphi}^-$ получается система

$$\sum_{\sigma<N} \bar{v}_{\sigma\sigma} + \frac{1}{a^2} \bar{v}_{NN} + \frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}^+ = 0,$$

$$\sum_{\sigma<N} \bar{\varphi}^+_{\sigma\sigma} + \frac{1}{a^2} \bar{\varphi}^+_{NN} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N_+, \tag{6.18}$$

$$\sum_{\sigma<N} \bar{\varphi}^-_{\sigma\sigma} + \frac{1}{(C-a)^2} \bar{\varphi}^-_{NN} = 0,$$

$$\bar{v} = 0,$$

$$\bar{\varphi}^+ + \bar{\varphi}^- = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^{N-1}, \tag{6.19}$$

$$\frac{1}{a} \bar{\varphi}^+_N + \frac{1}{C-a} \bar{\varphi}^-_N = 0.$$

Легко видеть, что эта система эллиптична и, так как $C - a > 0$, не имеет ограниченных экспоненциальных решений.

Итак, коэрцитивность задачи (6.15), (6.16), (6.17) с граничными условиями (6.14) установлена. В силу леммы 6.1, функции v, φ^+ и φ^- обладают гладкостью, необходимой для применения теоремы 3.3. Следовательно, v, φ^+, φ^- аналитичны в окрестности нуля в $U \cup S$. Теорема доказана. ∎

Комментарии и библиографические указания

Преобразования годографа и Лежандра используются в различных областях: от динамики жидкости до теории выпуклых тел. Они возникали, например, в исследованиях Фридрихса потоков с кавитацией (Фридрихс [1]) и исследованиях Леви уравнения Монжа — Ампера (Леви [1]). Сведения, приведенные в этой главе, основаны на результатах работы Киндерлерера и Ниренберга [1]. Теорема 2.3 о гладкости получена Кафарелли [2]. Широко изучались краевые задачи для эллиптических уравнений и систем. Сошлемся, например, на работы Агмона, Дуглиса и Ниренберга [1, 2], Лионса и Мадженеса [1], Морри [1].

Материал § 4—6 заимствован из работы Киндерлерера, Ниренберга и Шпрука [1]. За дальнейшими подробностями о задачах с плазмой мы отсылаем к работам Темама [1, 2] и Киндерлерера и Шпрука [1]. Элегантное доказательство теоремы 3.4 при $N = 2$, предложенное Леви (Леви [5]), состоит в аналитическом продолжении $u^1_{x_1} - iu^2_{x_2}$ с помощью функции Римана уравнения $\Delta + \lambda$. Это доказательство в духе гл. V. Подобный метод можно использовать и для доказательства теоремы 5.3 в случае $N = 2$. Другие обобщения и техника, используемая при изучении задач со свободной границей высокого порядка, даны в работе Киндерлерера, Ниренберга и Шпрука [2].

Теория существования и гладкости решений в задаче о двух мембранах развита в работах Вергара-Кафарелли [2, 3, 4]. В последних работах исследуются нелинейные мембраны.

Упражнения

1. Пусть v — преобразование Лежандра функции u, определенное в (2.2) относительно (2.1). Покажите, что если оператор $F(D^2u, Du, u, x)$ эллиптичен на u и $G=(D^2v, Dv, v, y)=F(D^2u, Du, u, x)$, то G эллиптичен на v.

2. Пусть ψ — преобразование Лежандра нулевого порядка функции u, определенное в (2.9) относительно (2.8). Покажите, что если оператор F эллиптичен на u и $H(D^2\psi, D\psi, \psi, y)=F(D^2u, Du, u, x)$, то H эллиптичен на ψ.

3. Пусть $L(D)$ — эллиптический линейный оператор с гладкими коэффициентами порядка 2μ, $\mu\geqslant 1$, определенный в окрестности U точки $x=0$. Докажите коэрцитивность задачи

$$L(D)u=f \quad \text{в} \quad U\cap\{y_n>0\},$$
$$D_N^h u=g_h \quad \text{на} \quad S=U\cap\{y_N=0\},\ 1\leqslant h\leqslant\mu.$$

Исследуйте этот вопрос для задачи

$$L(D)u=f \quad \text{в} \quad U\cap\{y_N>0\},$$
$$D_N^{h_j}u=g_j \quad \text{на} \quad S=\{y_N=0\}\cap U,$$

где $0\leqslant h_1<h_2<\ldots<h_\mu\leqslant 2m-1$.

В упражнениях 4—7 определите, эллиптичны или нет, или при каких условиях эллиптичны приведенные ниже системы.

4.
$$\begin{aligned}&\Delta u^1+cu^2=f_1,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^p u^1+\Delta u^2=f_2\end{aligned} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N.$$

5.
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^3}{\partial x_N^3}u^1+\sum_{\sigma<N}\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma^2}u^2=f_1,\\ &\sum_{\sigma<N}\frac{\partial^2}{\partial x_\sigma^2}u^1+c\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}u^2=f_2\end{aligned} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N.$$

6.
$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}u^1+\frac{\partial}{\partial x_2}u^2=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x_1}u^0-u^1=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x_2}u^0-u^2=0\end{aligned} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2.$$

7.
$$\begin{aligned}&\Delta^m u^1+c_{12}u^2=f_1,\\ &\frac{\partial^p}{\partial x_k^p}u^1+c_{22}\Delta^n u^2=f_2\end{aligned} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N$$

при различных предположениях относительно m, p, n.

Проверьте, являются ли приведенные ниже задачи 8—10 коэрцитивными.

8.
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad x_N > 0,$$
$$au + b\frac{\partial}{\partial x_N} u = 0 \quad \text{на} \quad x_N = 0.$$

9.
$$\left.\begin{array}{r} \Delta u^1 = 0, \\ \Delta u^2 + \lambda u^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{в} \quad x_N > 0,$$
$$\left.\begin{array}{r} u^1 - u^2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_N} u^1 + \dfrac{\partial}{\partial x_N} u^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{на} \quad x_N = 0.$$

10.
$$\left.\begin{array}{r} \Delta u^1 = f_1, \\ \Delta u^2 + \lambda u^1 = f_2 \end{array}\right\} \quad \text{в} \quad x_N > 0,$$
$$u^1 = \frac{\partial}{\partial x_N} u^1 = 0 \quad \text{на} \quad x_N = 0.$$

11. Краевая задача
$$\frac{\partial}{\partial \bar z} u = f \quad \text{в} \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$
$$u = g \quad \text{на} \quad \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

не коэрцитивна, так как оператор $\partial/\partial\bar z = \frac{1}{2}\,[(\partial/\partial x_1) + i\,(\partial/\partial x_2)]$ не удовлетворяет условию о корнях. Тем не менее отображение T: $H^s(\Omega) \to H^{s-1}(\Omega) \times H^{s-(1/2)}(\partial\Omega)$, определенное по этой краевой задаче, имеет нулевое ядро. Покажите, что, однако, $\dim \operatorname{coker} T = \infty$. [*Указание*: $(f, g) \in \operatorname{coker} T$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar z} \bar f\, dx + \int\limits_0^{2\pi} u\bar g\, d\theta = 0 \qquad \forall u \in C^\infty(\bar\Omega).]$$

12. Предположим, что Γ — гиперповерхность класса C^1, разделяющая окрестность начала координат на Ω^+ и Ω^-, как в § 6. Пусть

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^+,$$
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^-,$$
$$\left.\begin{array}{r} u = 0, \\ u_\nu^+ + u_\nu^- - \varphi(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

где u_ν^+, u_ν^- — нормальные производные функции u соответственно со стороны Ω^+ и Ω^-, а нормаль ν направлена в сторону Ω^+. Допустим, что $u_\nu^+ \neq 0$ на Γ. Что можно сказать о гладкости Γ?

13. Докажите, что из предположений теоремы 5.3 следуют включения

$$w \in C^{4,\alpha}(\Omega \cup \Gamma), \quad \varphi^1 \in C^{3,\alpha}(U \cup S) \quad \text{и} \quad \varphi^2 \in C^{2,\alpha}(U \cup S).$$

14. Пусть $p(z)$ — полином степени 2μ с корнями $a_1, \ldots, a_\mu$ в верхней полуплоскости и $a_{\mu+1}, \ldots, a_{2\mu}$ в нижней полуплоскости. Покажите, что общее решение уравнения

$$p(D_t)\,u(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad D_t = -\,id/dt,$$

определяется формулой

$$u(t)=\int_{\Gamma} e^{izt}\frac{q(z)}{p(z)}\,dz, \qquad -\infty<t<\infty,$$

где Γ — любой контур, охватывающий корни $a_1, \ldots, a_{2\mu}$ многочлена p, а $q(z)$ — полином степени не выше $2\mu-1$. Если $u(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то

$$u(t)=\int_{\Gamma'} e^{itz}\frac{q(z)}{p^+(z)}\,dz, \quad -\infty<t<\infty,$$

где $p^+(z)=(z-a_1)\ldots(z-a_\mu)$, $\deg q\leqslant\mu-1$ и Γ' — контур, охватывающий $a_1, \ldots, a_\mu$. Покажите также, что

$$D^k u(0)=0, \qquad \text{если} \qquad k+\deg q\leqslant\mu-1.$$

15. Рассмотрите следующий вариант задачи об ограниченных конфигурациях плазмы. Дано $\lambda>\lambda_0$, λ_0 — наименьшее собственное значение оператора $-\Delta$ в Ω с краевыми условиями Дирихле. Найти такое $u\in H^1(\Omega)$, что

$$-\Delta u+\lambda\min(u,\ 0)=0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u=1 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Переформулируйте этот вопрос в терминах «проблемы Беллмана», гл. III, упр. 8—10.

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. ВВЕДЕНИЕ

К числу привлекательных черт теории вариационных неравенств следует отнести ее применимость к большому количеству проблем, имеющих физический интерес. О некоторых из них будет рассказано в этой главе. Перечислим их. Это проблема смазки (§ 2), стационарная фильтрация жидкости через пористую перегородку как в двумерном, так и в трехмерном случаях (§ 3—6), обтекание жидкостью заданного профиля (§ 7 и 8) и малые изгибы упругой балки (§ 9). Эти проблемы формулируются в терминах вариационных неравенств для эллиптических операторов с выпуклыми множествами допустимых функций того же типа, как в задаче с препятствиями. В следующей главе изучается задача Стефана, связанная с оператором теплопроводности.

В нескольких случаях в первоначальной постановке задачи требуется найти решение задачи со свободной границей, которое само по себе не является решением вариационного неравенства. Однако с помощью вспомогательных преобразований оказывается возможным ввести новое зависимое переменное, являющееся решением вариационного неравенства. Мы показываем, что это новое неизвестное может быть выбрано как решение задачи Коши, включающей исходное неизвестное.

2. ЗАДАЧА ТЕОРИИ СМАЗКИ

В этом параграфе будет рассказано об одной простой задаче механики — о смазке подшипника. Применение теории вариационных неравенств позволяет продвинуться в ее изучении. Ищется распределение давления в тонком слое смазывающего вещества, т. е. жидкости с данной вязкостью η. Эта жидкость находится в узком зазоре G между двумя поверхностями: валом Σ_s и подшипником Σ_b, движущимися относительно друг друга. Давление p должно удовлетворять уравнению Рейнольдса в области G, которое будет записано ниже в подходящей для нас форме, вместе с некоторыми граничными условиями.

Сосредоточим внимание на случае, особенно интересном для техники (рис. 1). Рассмотрим смазанный цилиндрический подшипник,

где Σ_s и Σ_b — части круговых цилиндров с параллельными, но различными осями высоты $2b$. Предположим, что Σ_b находится внутри Σ_s, Σ_s неподвижна, а Σ_b вращается с постоянной угловой скоростью ω. Обычно давление достигает некоторого минимального значения p_c, связанного с давлением парообразования в смазывающей жидкости, ниже которого смазочный слой отделяется от Σ_s или Σ_b, образуя область кавитации I. Эта область кавитации заполнена паром с постоянным давлением p_c. Так как p_c близко к атмосферному давлению, то полагаем $p_c = 0$. Наша изначальная формулировка задачи должна быть уточнена с учетом этого явления. Мы ищем функцию

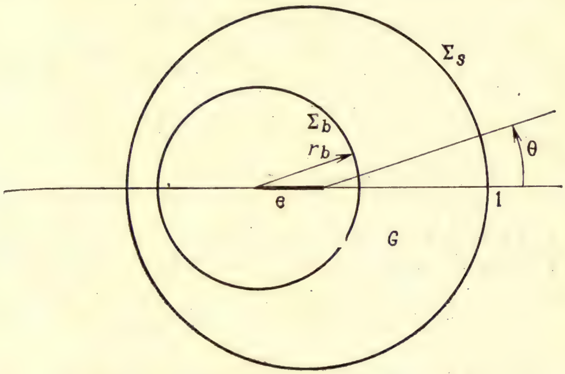

Рис. 1. Цилиндрический подшипник.

$p \geqslant 0$ в G, удовлетворяющую уравнению Рейнольдса там, где $p > 0$. Так как через границу множества кавитации масса не перемещается, то $\partial p / \partial \nu = 0$ на $\partial I \cap G$, где ν — нормаль к ∂I.

Введем цилиндрические координаты r, θ, z с началом координат в центре Σ_s и с углом θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, измеряемым от линии максимального зазора между центрами (рис. 1). Так как зазор между подшипником и осью предполагается очень малым, мы считаем p функцией только переменных θ и z, что позволяет формулировать задачу в плоскости переменных θ и z. Чтобы записать уравнение Рейнольдса, введем некоторые параметры. Пусть $r_s = 1$ — радиус Σ_s, r_b — радиус Σ_b, e — расстояние между осями Σ_s и Σ_b и $\varepsilon = e/(1 - r_b)$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, — эксцентриситет подшипника. Положим $\Omega = \{(\theta, z) \mid 0 < \theta < 2\pi, |z| < b\}$. Тогда задача, которая здесь обсуждается, принимает следующий вид.

Задача 2.1. *Найти функцию* $p(\theta, z) \in C^1(\overline{\Omega})$ *и область* $I \subset \Omega$, *такие что*

$$A(p) = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\alpha \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha \frac{\partial p}{\partial z}\right) = f \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I, \tag{2.1}$$

$$p > 0 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus I, \tag{2.2}$$

$$p = \partial p/\partial \nu = 0 \quad \text{на} \quad \partial I \cap \Omega, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &p(\theta, b) = p(\theta, -b) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ &\text{и} \quad p(2\pi, z) = p(0, z), \quad -b \leqslant z \leqslant b, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\text{где} \quad \alpha = (1 + \varepsilon \cos\theta)^3 \ \text{и} \ f = 6\omega\eta\varepsilon(1 - r_b)^{-2} \sin\theta. \tag{2.5}$$

Отметим, что в этой постановке из-за (2.3) необходимо предполагать поверхность $\partial I \cap \Omega$ гладкой. Первое из граничных условий (2.4) означает, что смазка может свободно втекать с обоих концов из резервуаров при атмосферном давлении. Второе из граничных условий — это обычное условие периодичности.

Предположим, что поверхность $\partial I \cap \Omega$ действительно гладкая и выполнено (2.3). Тогда, положив $p = 0$ в I, получим $C^1(\Omega)$-продолжение функции p в $(\Omega \setminus I) \cup I \subset \overline{\Omega}$. Представляется разумным заменить (2.3) условием

$$p = 0 \quad \text{в} \quad I.$$

В этом случае $\Omega \setminus I$ становится в точности множеством, где p положительна. Условия (2.1), (2.2), (2.3) можно записать следующим образом:

$$p \geqslant 0 \ \text{и} \ p(Ap - f) = 0 \quad \text{в} \ \Omega.$$

Решение этой задачи может быть найдено с помощью решения вариационного неравенства, точнее, задачи 2.2, приведенной ниже. Оно будет обладать дополнительным свойством, что $Ap - f \geqslant 0$ в Ω.

Обозначим через $H^1_*(\Omega)$ подпространство пространства $H^1(\Omega)$, элементы которого v удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &v(0, z) = v(2\pi, z), \qquad |z| < b, \\ &v(\theta, b) = v(\theta, -b) = 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{aligned} \tag{2.6}$$

и положим

$$K = \{v \in H^1_*(\Omega) \mid v \geqslant 0 \quad \text{в} \ \Omega\}. \tag{2.7}$$

Решение задачи 2.1 определяется с помощью решения p следующей задачи.

Задача 2.2. *Найти такое $p \in K$, что для всех $v \in K$ будет $a(p, v - p) \geqslant \int\limits_\Omega f(v - p)\, d\theta\, dz$, где*

$$a(u, v) = \int\limits_\Omega \alpha(u_\theta v_\theta + u_z v_z)\, d\theta\, dz, \tag{2.8}$$

причем α и f определены в (2.5).

Легко проверить, что $a(u, v)$ коэрцитивна на $H^1_*(\Omega)$. Поэтому из теоремы 2.1 гл. II выводится существование единственного реше-

ния $p(\theta, z)$ задачи 2.2. Более того, p — гладкая функция в $\bar{\Omega}$. Чтобы доказать это самым простым способом, преобразуем Ω в кольцо O в плоскости переменных $x=(x_1, x_2)$ с помощью отображения

$$x_1=(a+b+z)\cos\theta, \quad x_2=(a+b+z)\sin\theta, \tag{2.9}$$

где $a>0$ фиксировано. Тогда

$$O=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid a<|x|<a+2b\}$$

и отрезки $z=-b$ и $z=b$ отображаются соответственно в окружности $|x|=a$ и $|x|=a+2b$, ограничивающие O. В силу условий периодичности из (2.6), соотношения (2.9) определяют непрерывное отображение $H^1_*(\Omega)$ на $H^1_0(O)$. При этом K преобразуется в замкнутое выпуклое множество $\tilde{K}=\{v\in H^1_0(O) \mid v\geqslant 0 \text{ в } O\}$.

Для функции $g(\theta, z)$ положим $\tilde{g}(x)=g(\theta, z)$ и определим

$$a_{11}(x)=\frac{\tilde{\alpha}(x)}{|x|}\left(\frac{x_1^2}{|x|^2}+x_2^2\right),$$

$$a_{12}(x)=\frac{\tilde{\alpha}(x)}{|x|}\left(\frac{x_1x_2}{|x|^2}-x_1x_2\right)=a_{21}(x),$$

$$a_{22}(x)=\frac{\tilde{\alpha}(x)}{|x|}\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{|x|^2}\right).$$

Вместо задачи 2.2 рассмотрим вариационное неравенство

$$u\in\tilde{K}: \quad \int_O a_{ij}u_{x_i}(v-u)_{x_j}\,dx\geqslant\int_O \tilde{f}(v-u)\frac{dx}{|x|} \quad \forall v\in\tilde{K}, \tag{2.10}$$

решение которого $u(x)=\tilde{p}(x)$. В силу теоремы 2.3 гл. IV, $\tilde{p}\in H^{2,s}(O)$; следовательно, $p\in H^{2,s}(\Omega)$, $1\leqslant s<\infty$. Таким образом, доказана

Теорема 2.3. *Существует единственное решение $p(\theta, z)$ задачи 2.2. При этом $p\in H^{2,s}(\Omega)\cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$, $1\leqslant s<\infty$, $0\leqslant\lambda<1$.*

Опишем кратко некоторые свойства решения p. В частности, можно отметить, что, как бы медленно ни вращался внутренний цилиндр Σ_b, кавитация всегда присутствует, т. е. $I\neq\emptyset$.

Теорема 2.4. *Пусть $p(\theta, z)$ — решение задачи 2.2 и $I=\{(\theta, z)\in\Omega \mid p(\theta, z)=0\}$ — множество кавитации. Тогда*

(i) $p(\theta, z)=p(\theta, -z)$;

(ii) $I\neq\emptyset$.

Доказательство. Для доказательства (i) отметим просто, что $u(\theta, z)=p(\theta, -z)$ является решением задачи 2.2. В силу единственности решения, $p(\theta, z)=p(\theta, -z)$.

Для доказательства (ii) предположим, что $I=\varnothing$. Тогда p — единственное решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &Ap=f && \text{в } \Omega, \\ &p=0 && \text{для } \ z=b \text{ и } z=-b, \\ &p(0,\ z)=p(2\pi,\ z) && \text{для } \ -b\leqslant z\leqslant b. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Элементарные вычисления показывают, что $u(\theta,\ z)=-p(2\pi-\theta,\ z)$ также является решением задачи (2.11), следовательно, $u=p$ в Ω. В этом случае, однако, $p\notin K$, так как есть точки, в которых эта функция отрицательна. Следовательно, $I\neq\varnothing$. ∎

Другие интересные свойства p даны в упражнениях. Обратим внимание на зависимость решения от эксцентриситета ε. Для этого перепишем α и f из (2.5) в виде

$$\alpha=\alpha_\varepsilon=1+\varepsilon\beta(\theta,\ z,\ \varepsilon),\quad f=f_\varepsilon=\varepsilon f_0 \tag{2.12}$$

и через p_0 обозначим решение неравенства

$$p_0\in K:\quad \int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial\theta}p_0\frac{\partial}{\partial\theta}(v-p_0)+\frac{\partial}{\partial z}p_0\frac{\partial}{\partial z}(v-p_0)\right]d\theta\,dz\geqslant$$

$$\geqslant\int_\Omega f_0(v-p_0)\,d\theta\,dz \text{ для } v\in K. \tag{2.13}$$

Теорема 2.5. *Если* p_ε — *решение задачи* 2.2 *для* α_ε *и* f_ε, *а* p_0 *определено в* (2.13), *то* $\|p_\varepsilon-\varepsilon p_0\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C\varepsilon^2$, *где* $C>0$ — *константа.*

Функцию p_0 можно рассматривать как первый член в асимптотическом разложении для p_ε. Доказательство оставлено в качестве упражнения.

3. ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ

В этом параграфе мы опишем задачу фильтрации жидкости через пористую плотину, предполагая геометрию плотины очень простой. Более общая задача изучается в § 5, 6. Рассмотрим два резервуара воды, разделенные земляной плотиной. У этой плотины бесконечная длина и постоянное поперечное сечение, состоящее из проницаемой вертикальной перегородки и непроницаемого горизонтального основания. Таким образом, мы пришли к двумерной задаче, определенной в прямоугольнике R, который является поперечным сечением вертикальной перегородки. Неизвестными в задаче являются (в поперечном сечении) влажная часть $\Omega\subset R$ плотины и распределение давления воды. Мы дадим их точное описание в терминах задачи со свободной границей, а затем посредством введения новой неизвестной функции преобразуем ее к вариационному неравенству (рис. 2). Математическое описание этой физической проблемы таково.

Задача 3.1. *Пусть a, h, $H \in \mathbb{R}$, причем $a>0$, $0<h<H$. Найти убывающую функцию $y=\varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, с $\varphi(0)=H$ и $\varphi(a)>h$ и функцию $u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$, где*

$$\Omega=\{(x, y) \mid 0<y<\varphi(x), \quad 0<x<a\},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(i) *$u(x, y)$ — гармоническая функция в Ω и непрерывная на $\bar{\Omega}$, $u(0, y)=H$ для $0 \leqslant y \leqslant H$;*

(ii) $u(a, y)=\begin{cases} h & \text{при} \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \\ y & \text{при} \quad h \leqslant y \leqslant \varphi(a), \end{cases}$

$u_y(x, 0)=0 \quad$ *при* $\quad 0<x<a$;

(iii) *$u(x, y)=y$, $\partial u/\partial \nu(x, y)=0$ при $y=\varphi(x)$, $0<x<a$, где ν — внешняя нормаль к кривой $y=\varphi(x)$.*

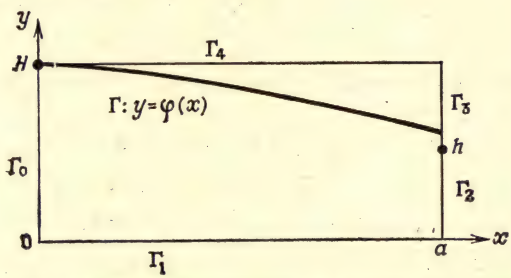

Рис. 2. Пористая перегородка в двумерном случае.

Соотношение между пьезометрическим напором жидкости u и давлением p определяется формулой

$$u(x, y)=y+(1/\gamma) p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

где гравитационная константа соответствующим образом нормирована, а γ — удельный вес жидкости. Необходимо отметить, что в задаче неизвестными являются как область Ω, так и функция $u(x, y)$. На неизвестной части

$$\Gamma: \quad y=\varphi(x), \quad 0<x<a, \tag{3.1}$$

границы $\partial\Omega$ функция $u(x, y)$ должна удовлетворять двум условиям — условиям Коши — и поэтому Γ является свободной границей. Наша цель состоит в переформулировке этой задачи со свободной границей в виде вариационного неравенства. Условие (iii) налагает некоторые требования гладкости на Γ.

Предположим прежде всего, что задача 3.1 имеет решение $\{\varphi, u\}$, где φ — гладкая функция, а $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Из (i), (ii) и второй части условия (iii) вытекает

Лемма 3.2. *Решение u задачи 3.1 удовлетворяет уравнению*

$$\int\limits_{\Omega} [u_x \zeta_x + u_y \zeta_y]\, dx\, dy = 0 \tag{3.2}$$

для любого $\zeta \in C^1(\overline{\Omega})$, *равного нулю в окрестности отрезков* $\partial\Omega \cap \{x=0\}$ *и* $\partial\Omega \cap \{x=a\}$.

Справедливость леммы следует из формулы Грина

$$-\int_{\Omega} \Delta u \zeta \, dx\, dy = \int_{\Omega} [u_x \zeta_x + u_y \zeta_y]\, dx\, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \zeta \, ds.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $u \in H^1(\Omega)$ — *решение задачи* 3.1. *Тогда* $u(x, y) \geqslant y$ *в* Ω.

Доказательство. Заметим, что физически это означает не что иное, как утверждение о неотрицательности давления жидкости. Отметим прежде всего, что $u(0, y) \geqslant y$, $u(a, y) \geqslant y$ и $u(x, y) = y$ на Γ. Положим

$$\zeta = \min(u-y,\ 0) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad u \geqslant y, \\ u-y, & \text{если} \quad u < y. \end{cases}$$

Функция ζ неположительна и обращается в нуль при $x=0$ и $x=a$. Кроме того,

$$\zeta_x = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u \geqslant y, \\ u_x & \text{при} \quad u < y, \end{cases}$$

$$\zeta_y = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u \geqslant y, \\ u_y - 1 & \text{при} \quad u < y. \end{cases}$$

Применим предыдущую лемму, учитывая, что $\zeta = 0$ на Γ:

$$0 = \int_{\Omega} [u_x\zeta_x + u_y\zeta_y]\, dx\, dy = \int_{\{u<y\}} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\Omega} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\Omega} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)\, dx\, dy + \int_0^a [\zeta(x,\ \varphi(x)) - \zeta(x,\ 0)]\, dx =$$

$$= \int_{\Omega} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)\, dx\, dy - \int_0^a \zeta(x,\ 0)\, dx \geqslant \int_{\Omega} (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)\, dx\, dy,$$

причем в последнем неравенстве использовано, что $\zeta \leqslant 0$. Следовательно, $\zeta = 0$ в Ω, и поэтому $u \geqslant y$ в Ω. ∎

При фиксированном $x \in (0, a)$ величина протекания плотины, или расход воды, дается формулой $-\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\, dt$.

Лемма 3.4. *Пусть* u — *решение задачи* 3.1. *Тогда*

$$-\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\, dt = \frac{1}{2a}(H^2 - h^2) \quad \text{для} \quad 0 < x < a. \tag{3.3}$$

Доказательство. Действительно, выбирая в качестве $\zeta=\zeta(x)$ функцию только переменной x, равную нулю при $x=0$ и $x=a$, мы получим, в силу леммы 3.2, что

$$0=\int_0^a \zeta'(x)\left[\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\,dt\right]dx.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\,dt=\text{const}=k$, но

$$k=\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\,dt\,dx=\frac{1}{a}\int_{\partial\Omega} u(x,\ t)\,dt=\frac{1}{2a}(h^2-H^2). \blacksquare$$

В отличие от решения $p(\theta,\ z)$ проблемы смазки функция $u(x,\ y)$ сама не является решением вариационного неравенства. Какие свойства можно использовать в прямоугольнике

$$R=\{(x,\ y)\,|\,0<x<a,\ 0<y<H\} \tag{3.4}$$

для получения вариационного неравенства? Функция $v(x,\ y)=u(x,\ y)-y$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и обращается в нуль на Γ. Продолжим v непрерывно на $R\setminus\Omega$, положив ее там равной нулю. Это продолжение v принадлежит $H^1(R)$, поэтому, в силу леммы 3.2, для $\zeta\in C_0^\infty(R)$

$$\begin{aligned}\int_R[v_x\zeta_x+v_y\zeta_y]\,dx\,dy&=\int_\Omega[v_x\zeta_x+v_y\zeta_y]\,dx\,dy=\\&=\int_\Omega[u_x\zeta_x+u_y\zeta_y]\,dx\,dy-\int_\Omega\zeta_y\,dx\,dy=\\&=-\int_\Omega\zeta_y\,dx\,dy=-\int_R I_\Omega\zeta_y\,dx\,dy,\end{aligned}$$

где I_Ω — характеристическая функция Ω. В результате этих вычислений получаем равенство

$$-\Delta(u-y)=\frac{\partial}{\partial y}I_\Omega \quad \text{в} \quad R, \tag{3.5}$$

понимаемое в смысле теории обобщенных функций. Это наводит на мысль ввести новую функцию $w(x,\ y)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\begin{aligned} w_y&=y-u \quad \text{в} \quad \Omega,\\ w&=0 \quad\ \ \text{на} \quad \Gamma.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Задача (3.6) интегрируется:

$$w(x,\ y)=\int_y^{\varphi(x)}[u(x,\ t)-t]\,dt, \quad (x,\ y)\in\Omega. \tag{3.7}$$

В силу (3.6) и предполагаемой гладкости Г, $w_x=0$ на Г. Поэтому функция

$$\tilde{w}(x,\ y)=\begin{cases} w(x,\ y), & (x,\ y)\in\Omega, \\ 0, & (x,\ y)\in R\setminus\Omega, \end{cases} \tag{3.8}$$

принадлежит $C^1(R)$ и удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{w}=|\operatorname{grad}\tilde{w}|=0 \quad \text{на} \quad R\setminus\Omega.$$

Это свойство наводит на мысль, что $\tilde{w}$ может быть решением вариационного неравенства. Продолжая эти формальные рассуждения, мы, в силу (3.5), приходим к предположению, что $-\Delta\tilde{w}=-I_\Omega$ в R, и, значит,

$$-\Delta\tilde{w}(v-\tilde{w})\geqslant-(v-\tilde{w}) \quad \text{п. в. в} \quad R$$

для любой $v\geqslant 0$ в R. Но отсюда, конечно, следует, что в качестве выпуклого множества K допустимых функций для нашего вариационного неравенства мы должны взять множество неотрицательных v с подходящими граничными условиями. Выберем эти граничные условия и докажем теперь строго, что $\tilde{w}$ является решением вариационного неравенства.

В силу (3.6) или (3.7),

$$\begin{gathered} w(0,\ y)=\tfrac{1}{2}(H-y)^2, \qquad 0\leqslant y\leqslant H, \\ w(a,\ y)=\begin{cases} \tfrac{1}{2}(h-y)^2, & 0\leqslant y\leqslant h, \\ 0, & h\leqslant y\leqslant\varphi(a). \end{cases} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Вследствие (iii) и леммы 3.4

$$\begin{aligned} w_x(x,\ 0)&=\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\,dt+[u(x,\ \varphi(x))-\varphi(x)]\,\varphi'(x)= \\ &=\int_0^{\varphi(x)} u_x(x,\ t)\,dt=\frac{1}{2a}(h^2-H^2), \end{aligned}$$

и поэтому

$$w(x,\ 0)=\tfrac{1}{2}H^2+[1/(2a)](h^2-H^2)\,x, \quad 0\leqslant x\leqslant a. \tag{3.10}$$

Обозначим через $g(x,\ y)$ функцию, определяющую граничные значения $w(x,\ y)$ в Ω, и продолжим ее до функции из $H^{2,\infty}(R)$, тоже обозначенной через g, с помощью формулы

$$g(x,\ y)=\begin{cases} \tfrac{1}{2}(H-y)^2+[x/(2a)]\,[(h-y)^2-(H-y)^2], & 0\leqslant y\leqslant h, \\ \tfrac{1}{2}(H-y)^2-[x/(2a)]\,(H-y)^2, & h\leqslant y\leqslant H. \end{cases} \tag{3.11}$$

Отметим, что $\tilde{w}\in H^1(\Omega)$, так как по предположению $u\in H^1(\Omega)$. Кроме того, из соотношения $w_y=y-u\leqslant 0$ в Ω следует, что

$$\tilde{w}\geqslant 0 \quad \text{в} \quad R. \tag{3.12}$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\tilde{w}$ — *функция* (3.8), *где* w — *решение задачи Коши* (3.6). *Тогда для всех* $\zeta \in C^\infty(R)$, *равных нулю около* $x=0$, $x=a$ *и* $y=0$,

$$\int_R [\tilde{w}_x \zeta_x + \tilde{w}_y \zeta_y]\, dx\, dy + \int_R I_\Omega \zeta\, dx\, dy = 0,$$

где I_Ω — *характеристическая функция множества* Ω.

Доказательство. Положим $\zeta = \chi_y$, где χ и χ_x равны нулю на нижней и боковых сторонах R; например, положим

$$\chi(x, y) = \int_0^y \zeta(x, t)\, dt.$$

Тогда, интегрируя дважды по частям и учитывая, что хотя бы один из двух множителей в интегралах по $\partial\Omega$ равен нулю, получим, что

$$\begin{aligned}\int_R [\tilde{w}_x \zeta_x + \tilde{w}_y \zeta_y]\, dx\, dy &= \int_\Omega [w_x \zeta_x + w_y \zeta_y]\, dx\, dy = \\ &= \int_\Omega [w_x \chi_{xy} + w_y \chi_{yy}]\, dx\, dy = \\ &= \int_\Omega [-w_{xy}\chi_x + w_y \chi_{yy}]\, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} w_x \chi_x \nu_y\, ds = \\ &= \int_\Omega [w_y(\chi_{xx} + \chi_{yy})]\, dx\, dy - \int_{\partial\Omega} w_y \chi_x \nu_x\, ds = \int_\Omega w_y\, \Delta\chi\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Далее, в силу леммы 3.2 и соотношения (3.6),

$$\begin{aligned}\int_R [\tilde{w}_x \zeta_x + \tilde{w}_y \zeta_y]\, dx\, dy &= \int_\Omega (y - u)\, \Delta\chi\, dx\, dy = \\ &= -\int_\Omega \operatorname{grad} y \cdot \operatorname{grad} \chi\, dx\, dy + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \chi\, dx\, dy = \\ &= -\int_\Omega \chi_y\, dx\, dy = -\int_\Omega \zeta\, dx\, dy. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Так как в нашей постановке Ω является неизвестной, то данная выше характеризация w не может быть использована для решения задачи 3.1. Мы показали, однако, что $-\Delta\tilde{w} = I_\Omega$ в R. Положим

$$K = \{v \in H^1(R) \mid v \geq 0 \text{ в } R \text{ и } v = g \text{ на } \partial R\}. \tag{3.13}$$

Так как $g \in K$, то K — непустое замкнутое подмножество из $H^1(R)$ вне зависимости от предположения о существовании u. Кроме того, в силу (3.9) — (3.12), $\tilde{w} \in K$. Для любого $v \in K$ можно приблизить $v - \tilde{w}$ функциями ζ, удовлетворяющими условиям леммы 3.5.

Поэтому

$$\int_R [\tilde{w}_x (v-\tilde{w})_x + \tilde{w}_y (v-\tilde{w})_y]\, dx\, dy = -\int_\Omega (v-\tilde{w})\, dx\, dy =$$
$$= -\int_R (v-\tilde{w})\, dx\, dy + \int_{R\setminus\Omega} (v-\tilde{w})\, dx\, dy =$$
$$= -\int_R (v-\tilde{w})\, dx\, dy + \int_{R\setminus\Omega} v\, dx\, dy \geqslant -\int_R (v-\tilde{w})\, dx\, dy,$$

так как $v \geqslant 0$ в R. Итак, доказана

Теорема 3.6. *Пусть* $\{\varphi, u\}$ — *решение задачи* 3.1 *с* $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *и гладкой* φ. *Пусть* w — *решение задачи Коши*

$$w_y = y - u \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma: \quad y = \varphi(x), \quad 0 < x < a,$$

$$\text{и} \quad \tilde{w} = \begin{cases} w & \text{в } \Omega, \\ 0 & \text{в } R\setminus\Omega. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{w}$ *удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\tilde{w} \in K: \quad \int_R [\tilde{w}_x (v-\tilde{w})_x + \tilde{w}_y (v-\tilde{w}_y)]\, dx\, dy \geqslant$$
$$\geqslant -\int_R (v-\tilde{w})\, dx\, dy \quad \forall v \in K, \qquad (3.14)$$

где K *определено в* (3.13). *Кроме того,* $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$.

Из теоремы 3.6 вытекает

Следствие 3.7. *Если* $\{\varphi, u\}$ — *решение задачи* 3.1 *с* $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *и гладкой* φ, *то решение задачи* 3.1 *единственно.*

В противном случае вариационное неравенство (3.14) имело бы более одного решения.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Теперь наша цель будет состоять в нахождении решения исходной задачи с помощью изучения вариационного неравенства (3.14). Билинейная форма, связанная с интегралом Дирихле

$$a(u, v) = \int_R [u_x v_x + u_y v_y]\, dx\, dy, \qquad u, v \in H^1(R),$$

которую для краткости мы назовем формой Дирихле, коэрцитивна на $H_0^1(R)$. Поэтому из теоремы 2.1 гл. II вытекает существование единственного решения задачи (3.14), которое мы обозначим через $w(x, y)$. В дальнейшем мы докажем, что $u = y - w_y$ и множество

$\Gamma = \partial\Omega \cap R$, где $\Omega = \{(x, y) \mid w(x, y) > 0\}$, образуют решение задачи 3.1. Изучение свободной границы Г само является частью этого плана. Доказательства, данные здесь, по существу, двумерны. Их обобщение на высшие размерности приведено в § 6.

Наша ближайшая цель — гладкость решения w. Чтобы применить теорию о гладкости из гл. IV, мы должны доказать, что решение u задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \quad &\text{в} \quad R, \\ u = h \quad &\text{на} \quad \partial R \end{aligned} \tag{4.1}$$

принадлежит $H^{2,p}(R)$, если $f \in L^p(R)$, а $h \in H^{2,p}(R)$, где $2 \leqslant p < \infty$. Этот результат не очевиден в окрестности вершин прямоугольника R, так как здесь ∂R теряет гладкость. Задача (4.1) имеет единственное решение $u \in H^1(R)$, например, в силу теоремы 2.1 гл. II. Заменяя u на $u-h$, можно взять $h=0$.

Продолжим u в область $R^* = \{(x, y) \mid 0 < x < a, -H < y < 0\}$, положив

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in R, \\ -u(x, -y), & (x, y) \in R^*. \end{cases}$$

В силу леммы об H^1-склейке (гл. II, лемма А.8), $\tilde{u} \in H^1(R \cup \Gamma_1 \cup R^*)$, где $\Gamma_1 = \{(x, 0) \mid 0 < x < a\}$ — основание плотины. Более того, для любого x_0, $0 < x_0 < a$, при малом ε

$$\tilde{u} \in H^2(R \cap B_\varepsilon(x_0, 0)) \cap H^2(R^* \cap B_\varepsilon(x_0, 0))$$

в силу теории гладкости решений эллиптических задач. Заметим, что

$$-\Delta\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{п. в. в} \quad R \cup R^*, \tag{4.2}$$

$$\text{где} \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in R, \\ -f(x, -y), & (x, y) \in R^*. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что (4.2) выполняется в смысле теории обобщенных функций. Для проверки этого, выбрав $\zeta \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0, 0))$, где $0 < x_0 < a$, а $\varepsilon > 0$ мало, и положив $B_\varepsilon^+ = R \cap B_\varepsilon(x_0, 0)$, $B_\varepsilon^- = R^* \cap B_\varepsilon(x_0, 0)$, проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} [\tilde{u}_x\zeta_x + \tilde{u}_y\zeta_y]\,dx\,dy &= \int_{B_\varepsilon^+} [\tilde{u}_x\zeta_x + \tilde{u}_y\zeta_y]\,dx\,dy + \int_{B_\varepsilon^-} [\tilde{u}_x\zeta_x + \tilde{u}_y\zeta_y]\,dx\,dy = \\ &= \int_{B_\varepsilon^+} f\zeta\,dx\,dy - \int_{|x-x_0|<\varepsilon} u_y(x, 0)\,\zeta(x, 0)\,dx + \\ &\quad + \int_{B_\varepsilon^-} -f(x, -y)\,\zeta(x, y)\,dx\,dy + \int_{|x-x_0|<\varepsilon} u_y(x, 0)\,\zeta(x, 0)\,dx = \\ &= \int_{B_\varepsilon} \tilde{f}\zeta\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Здесь использовано, что след функции u_y на $\Gamma_1 \cap B_\varepsilon(x_0, 0)$ определен, так как $u \in H^2(B_\varepsilon \cap R)$ и $u \in H^2(B_\varepsilon \cap R^*)$. Следовательно, (4.2) выполняется в смысле теории обобщенных функций, и поэтому $\tilde{u}$ является решением задачи

$$-\Delta\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{в} \quad R \cup R^*,$$
$$\tilde{u} = 0 \quad \text{на} \quad x = 0.$$

Так как $x = 0$ — гладкая поверхность, то, в силу теорем о гладкости, $\tilde{u} \in H^{2,p}(B_\varepsilon(0, 0) \cap (R \cup R^*))$. Таким образом, установлена гладкость в точке $(x, y) = (0, 0)$. Гладкость в других вершинах прямоугольника R устанавливается аналогично. Итак, решение w задачи (3.14) удовлетворяет включению

$$w \in H^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R}) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Определим

$$\Omega = \{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\} \tag{4.3}$$

и отметим, что $\Delta w = 1$ в Ω и $w = w_x = w_y = 0$ в $R \setminus \Omega$.

Для упрощения описания Ω положим

$$\Gamma_0 = \{(0, y) \mid 0 < y < H\}, \quad \Gamma_1 = \{(x, 0) \mid 0 < x < a\},$$
$$\Gamma_2 = \{(a, y) \mid 0 < y < h\}, \quad \Gamma_3 = \{(a, y) \mid h < y < H\}$$
$$\text{и} \quad \Gamma_4 = \{(x, H) \mid 0 < x < a\}.$$

Так как w достигает своего минимума на $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$, то с помощью прямых вычислений устанавливается

Лемма 4.1. *При введенных выше обозначениях*

$$\begin{array}{llll} w_x \leqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_3, & w_y \leqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_4, \\ w_x = 0 \ \text{на} \ \Gamma_4, & w_x \leqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_1, \\ w_y = 0 \ \text{на} \ \Gamma_3, & w_y \leqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_2, \\ w_y \leqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_0, \end{array} \tag{4.4}$$

где w — решение задачи (3.14).

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 4.2. *Решение w задачи* (3.14) *непрерывно вместе со своими вторыми производными в окрестности $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в R и*

$$w_{xx} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \quad \text{а} \quad w_{yy} = 1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{4.5}$$

Доказательство. В силу непрерывности w и положительности g на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, существует окрестность в Ω множества $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так как $\Delta w = 1$ в Ω и $g \in C^{2,\lambda}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, то, в силу теорем о гладкости, для каждой пары $(x_0, y_0) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ существует такой шар $B_\varepsilon(x_0, y_0)$ с достаточно малым ε, что $w \in C^{2,\lambda}(B_\varepsilon(x_0, y_0) \cap \bar{\Omega})$,

$0<\lambda<1$. Следовательно, $w_{xx}=1-w_{yy}=1-g_{yy}=0$ на $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ и $w_{yy}=1-w_{xx}=1-g_{xx}=1$ на Γ_1. ∎

Следующая лемма приводит к интересным заключениям о свободной границе Γ.

Лемма 4.3. *Решение* w *задачи* (3.14) *удовлетворяет условиям*

$$w_x \leqslant 0 \quad \text{и} \quad w_y \leqslant 0 \quad \text{в} \quad R. \tag{4.6}$$

Доказательство. Воспользуемся принципом максимума. Мы знаем из нашей теоремы о гладкости, что $w_x, w_y \in C^{0,\lambda}(\bar{R})$, $0<\lambda<1$, и $w_x=w_y=0$ в $R\setminus\Omega$. Так как $\Delta w_x=\Delta w_y=0$ в Ω, то

$$w_x \leqslant \sup_{\partial\Omega} w_x \quad \text{и} \quad w_y \leqslant \sup_{\partial\Omega} w_y.$$

Рассмотрим w_x. Вследствие предыдущей леммы $w_{xx}=0$ на $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$, поэтому, в силу принципа максимума Хопфа[1]), w_x не достигает здесь своего максимума. Следовательно,

$$w_x \leqslant \sup_{\Gamma \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \Gamma_4} w_x, \quad \Gamma=\partial\Omega\setminus(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4).$$

В силу непрерывности, $w_x=0$ на Γ, а на $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4$ имеем $w_x \leqslant 0$. Следовательно, $w_x \leqslant 0$ в Ω.

Перейдем к рассмотрению w_y. Так как $(w_y)_y=1>0$ на Γ_1, то максимум w_y не может лежать на Γ_1. Легко видеть, что $w_y \leqslant 0$ в других точках $\partial\Omega$. ∎

Для любой точки $P_0=(x_0, y_0) \in R$ положим

$$Q^+_{P_0}=\{(x, y) \in \bar{R} \mid x>x_0,\ y>y_0\},$$

$$Q^-_{P_0}=\{(x, y) \in R \mid x<x_0,\ y<y_0\}.$$

Лемма 4.4. *Если* $P \in R\setminus\Omega$, *то* $Q^+_P \subset \bar{R}\setminus\bar{\Omega}$, *и если* $P \in R \cap \partial\Omega$, *то* $Q^-_P \subset \Omega$.

Доказательство. Пусть $P_0 \in R\setminus\Omega$; тогда $w(x_0, y_0)=0$. Так как, в силу леммы 4.3, $w_x \leqslant 0$ и $w_y \leqslant 0$ в R, то $w(x, y)=0$ при $x \geqslant x_0$ или $y \geqslant y_0$ и, значит, $\bar{Q}^+_{P_0} \subset \bar{R}\setminus\Omega$. Следовательно, $Q^+_{P_0} \subset \bar{R}\setminus\bar{\Omega}$.

Если $P \in R \cap \partial\Omega$ и Q^-_P не содержится в Ω, то существует точка $P_0 \subset Q^-_P$, в которой $w(x_0, y_0)=0$. В силу сказанного выше, $Q^+_{P_0} \subset \bar{R}\setminus\bar{\Omega}$. Но $P \in Q^+_{P_0}$, что противоречит включению $P \in R \cap \partial\Omega$. ∎

Перейдем к последней подготовительной лемме.

[1]) Имеется в виду следующее утверждение. Пусть $u(x) \not\equiv \text{const}$ — гармоническая функция в области G с границей ∂G и в точке $x_0 \in \partial G$ функция $|u(x)|$ принимает максимальное значение. Тогда если в точке x_0 для $u(x)$ определена производная по нормали $\partial u/\partial\nu$, то $\partial u(x_0)/\partial\nu \neq 0$. Это утверждение было независимо установлено О. А. Олейник и Э. Хопфом. — *Прим. перев.*

Лемма 4.5. *Решение w задачи* (3.14) *удовлетворяет условию $w_y=0$ на Γ_4. Кроме того, $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \varnothing$ и $\partial\Omega \cap R \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $0 < x_0 < a$. Выберем достаточно малое λ так, чтобы $0 < x_0 < x_0 + \lambda < a$. Тогда

$$w_y(x_0+\lambda,\ H) - w_y(x_0,\ H) =$$
$$= -\lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta}\{[w(x_0+\lambda, H-\eta) - w(x_0+\lambda, H)] - [w(x_0, H-\eta) - w(x_0, H)]\} =$$
$$= -\lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta}\{[w(x_0+\lambda,\ H-\eta) - g(x_0+\lambda,\ H)] -$$
$$- [w(x_0,\ H-\eta) - g(x_0,\ H)]\} =$$
$$= -\lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta}[w(x_0+\lambda,\ H-\eta) - w(x_0,\ H-\eta)] =$$
$$= -\lambda \lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta} w_x(x_0+\theta\lambda,\ H-\eta) \geqslant 0,$$

так как $w_x \leqslant 0$ на $\bar{R}$. Следовательно, $w_y(x,\ H)$ — неубывающая по x функция. Так как она равна нулю при $x=0$ и $x=a$, то $w_y(x,\ H)=0$ для $0<x<a$.

Другое доказательство этого утверждения можно получить с помощью леммы 4.3.

Теперь если $(x_0,\ H) \in \partial\Omega$, то интервал $\sigma = \{(x,\ H) \mid 0 < x < x_0\} \subset \partial\Omega$; в противном случае при некотором $P \in R \cap \partial\Omega$ выполнялось бы включение $(x_0,\ H) \in Q_P^{+}$. Для $(x_1,\ H) \in \sigma$ имеем $\Delta w_x = 0$ около $(x_1,\ H)$ и w_x достигает своего максимального значения 0 в $(x_1,\ H)$. Следовательно, $w_{xy}(x_1,\ H) > 0$. Но, в силу первого утверждения леммы, $w_{xy}(x_1,\ H) = w_{yx}(x_1,\ H) = 0$. Поэтому $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \varnothing$ и, значит, $\partial\Omega \cap R \neq \varnothing$. ∎

Теперь мы можем определить

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \inf\{y \mid (x,\ y) \in R\setminus\Omega\}, \quad 0<x<a, \\ &\varphi(0) = \lim_{x\to 0+}\varphi(x) \ \text{ и } \ \varphi(a) = \lim_{x\to a-}\varphi(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Точка $(x,\ \varphi(x)) \in \partial\Omega$, $0<x<a$. В силу леммы 4.4, $\partial\Omega \cap Q_P^{+} = \varnothing$ для $P = (x,\ \varphi(x)) \in R\setminus\Omega$, поэтому φ — невозрастающая функция. В частности, выписанные выше пределы существуют. Наконец, так как $w_y \leqslant 0$, то

$$\Omega = \{(x,\ y) \mid 0<y<\varphi(x),\ 0<x<a\},$$

где, напомним, Ω — множество, *определенное* в (4.3).

Лемма 4.6. *Множество $\partial\Omega \cap R$ не содержит отрезков, параллельных осям x или y. Следовательно, φ — непрерывная и строго убывающая функция.*

Доказательство. Для доказательства от противного предположим, что существует отрезок σ, параллельный оси y и содержащийся в $\partial\Omega \cap R$. Тогда существует область $U \subset \Omega$ с $\sigma \subset \partial U$, такая что $w \in C^\infty(U \cup \sigma)$ и, в силу леммы 4.3,

$$\Delta w_y = 0 \quad \text{в} \quad U, \quad w_y \leqslant 0 \quad \text{в} \quad U,$$

$$w = w_x = w_y = 0 \quad \text{на} \quad \sigma.$$

Итак, неположительная гармоническая функция w_y достигает своего максимума на σ, поэтому, используя принцип максимума Хопфа, получаем, что $(w_y)_x < 0$ на σ. Однако вследствие приведенных выше условий и гладкости w имеем $(w_y)_x = w_{yx} = w_{xy} = 0$ на σ. Таким же образом доказывается, что множество $\partial\Omega \cap R$ не содержит отрезков, параллельных оси x. ∎

Итак, множество $\Gamma = \partial\Omega \cap R = \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4)$ может быть описано следующим образом:

$$\Gamma: \quad y = \varphi(x), \quad 0 < x < a,$$

с функцией φ, определенной в (4.7).

Теорема 4.7. *Пусть w — решение неравенства* (3.14). *Положим*

$$\Omega = \{(x, y) \in R \mid w(x, y) > 0\}.$$

Тогда $\Gamma = \partial\Omega \cap R$ — аналитическая кривая.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 1.1 гл. V, в которой $u = w - \frac{1}{2}|z|^2$, а $\psi = -\frac{1}{2}|z|^2$, $z = x + iy$. Мы закончим обсуждение задачи 3.1 следующей теоремой.

Теорема 4.8. *Задача* 3.1 *допускает единственное решение* $\{u, \varphi\}$. *А именно пусть w — решение вариационного неравенства*

$$w \in K: \quad \int_R [w_x(v-w)_x + w_y(v-w)_y]\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant -\int_R (v-w)\,dx\,dy \quad \forall v \in K,$$

где $K = \{v \in H^1(R) \mid v \geqslant 0$ в R и $v = g$ на $\partial R\}$ с g, определенной в (3.11), *и положим $u = y - w_y$. Определим $\varphi(x)$, $0 < x < a$, с помощью* (4.7). *Тогда $\{u, \varphi\}$ — решение задачи* 3.1. *Кроме того, $u \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, а кривая $y = \varphi(x)$, $0 < x < a$, допускает аналитическую параметризацию.*

Доказательство. Остается проверить (3.2), откуда легко следуют условия (i), (ii) и (iii). Пусть ζ — гладкая функция в R, равная

нулю в окрестности $x=0$ и $x=a$. Тогда

$$\int_\Omega (u_x\zeta_x + u_y\zeta_y)\,dx\,dy = \int_\Omega [-w_{xy}\zeta_x + (1-w_{yy})\,\zeta_y]\,dx\,dy =$$
$$= \int_\Omega (-w_{xy}\zeta_x + w_{xx}\zeta_y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_R (-w_{xy}\zeta_x + w_{xx}\zeta_y)\,dx\,dy = \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(w_x\zeta_y) - \frac{\partial}{\partial y}(w_x\zeta_x)\right]dx\,dy =$$
$$= \int_{\partial R} w_x\zeta_x\,dx + w_x\zeta_y\,dy = \int_{\partial R} w_x\zeta_x\,dx = \frac{h^2-H^2}{2a}\int_0^a \zeta_x\,dx = 0.$$

Мы не будем проверять, что $\varphi(a) > h$. ∎

5. ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПОРИТСУЮ ПЕРЕГОРОДКУ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Мы продолжим изучение задачи фильтрации, рассмотрев вопрос, для формулировки которого из-за сложной геометрии плотины требуется три независимых переменных. А именно предположим, что наша

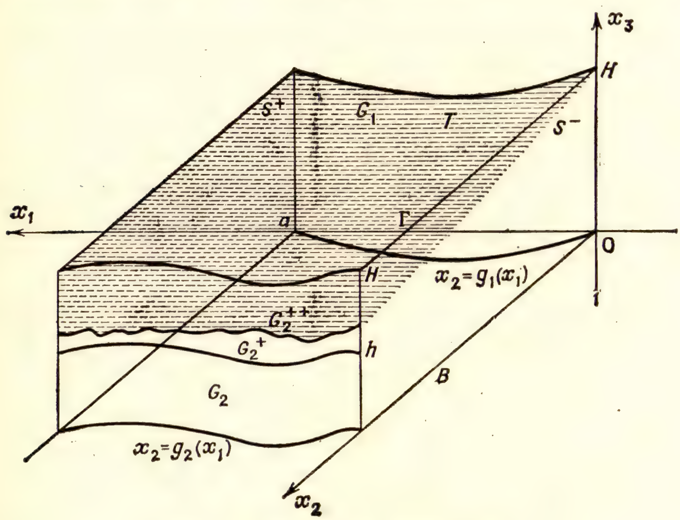

Рис. 3. Трехмерная плотина M.

плотина имеет переменную толщину, а ее боковые стенки вертикальны[1]). Основная трудность, с которой мы столкнемся при постановке

[1]) Очевидно, боковые стенки такой плотины не являются плоскими. Эта плотина перегораживает водонепроницаемый желоб с горизонтальным плоским дном и плоскими вертикальными боковыми стенками. — *Прим. перев.*

вариационного неравенства, состоит в определении граничных условий на основании плотины для элементов выпуклого множества допустимых функций. В предыдущем случае они были линейными, но теперь это будет не так. Решение этой задачи требует более глубокого исследования свободной границы.

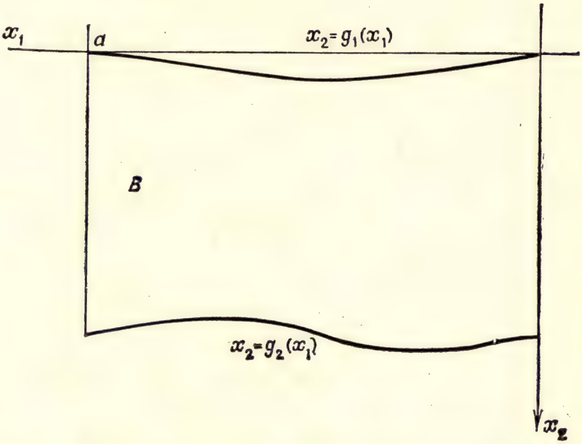

Рис. 4. Основание трехмерной плотины, $M = B \times (0, H)$.

Сначала мы опишем классическую задачу (рис. 3 и 4). Рассмотрим плотину M, заданную соотношением

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x_1) < x_2 < g_2(x_1), \quad 0 < x_1 < a, \ 0 < x_3 < H\},$$

где $a > 0$, $H > 0$, а функции $g_i \in C^{2,\lambda}([0, a])$, $\lambda > 0$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} g_1'(0) = g_2'(0) = g_1'(a) = g_2'(a) = 0, \\ g_1(x_1) < g_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant a. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Пусть B — основание, а T — верхняя поверхность M:

$$B = \{x \mid 0 < x_1 < a, \quad g_1(x_1) < x_2 < g_2(x_1), \quad x_3 = 0\},$$
$$T = \{x \mid 0 < x_1 < a, \quad g_1(x_1) < x_2 < g_2(x_1), \quad x_3 = H\}.$$

Для заданного h, $0 < h < H$, обозначим через φ: $B \to [0, H]$ непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(x_1, g_1(x_1)) = H \quad \text{и} \quad \varphi(x_1, g_2(x_1)) \geqslant h, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant a. \tag{5.2}$$

Для каждого такого φ положим

$$\Omega = \{x \in M \mid 0 < x_3 < \varphi(x'), \quad x' = (x_1, x_2)\};$$

это множество будет соответствовать влажной части плотины. Для соответствующих частей границы мы примем следующие обозначения:

$$G_1=\{x\in\bar{M}\mid x_2=g_1(x_1),\quad 0<x_1<a,\quad 0<x_3<H\},$$

$$G_2=\{x\in\bar{M}\mid x_2=g_2(x_1),\quad 0<x_1<a,\quad 0<x_3<h\},$$

$$G_2^+=\{x\in\bar{M}\mid x_2=g_2(x_1),\quad h<x_3<\varphi(x'),\quad 0<x_1<a\},$$

$$S^-=\{x\in\bar{M}\mid x_1=0,\quad g_1(0)<x_2<g_2(0),\quad 0<x_3<\varphi(0,\ x_2)\},$$

$$S^+=\{x\in\bar{M}\mid x_1=a,\quad g_1(a)<x_2<g_2(a),\quad 0<x_3<\varphi(a,\ x_2)\},$$

$$\text{и, наконец,}\quad \Gamma=\{x\in\bar{M}\mid x_3=\varphi(x'),\ x'\in B\}.$$

Поставим теперь задачу.

Задача 5.1. *Найти функцию $\varphi(x')$, $x'\in B$, удовлетворяющую* (5.2), *и функцию u, определенную на $\bar{\Omega}$, такую что*

(i) $\Delta u=0$ *в* Ω, $u\in C(\bar{\Omega})$, $u=H$ *на* G_1;

(ii) $u=\begin{cases} h & \textit{на}\ G_2, \\ x_3 & \textit{на}\ G_2^+, \end{cases}$ $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0$ *на* $B\cup S^+\cup S^-$;

(iii) $u=x_3$ *и* $\partial u/\partial\nu=0$ *на* Γ.

Как обычно, в постановке задачи мы предполагаем, что φ достаточно гладкая для того, чтобы условие (iii) имело смысл. Как и в случае задачи 3.1, переформулируем настоящую задачу в виде вариационного неравенства, в котором φ не возникает явно. Действительно, как и в (3.6), предположим существование решения $u\in H^1(\Omega)$ задачи 5.1 и определим новую функцию $w(x)$ как решение задачи Коши

$$w_{x_3}(x)=x_3-u(x),\quad x\in\Omega;\quad w(x)=0,\quad x\in\Gamma. \tag{5.3}$$

Хотя $w(x)$ можно выразить в виде интеграла, эта явная форма не требуется. Продолжим w на все M, положив ее равной нулю на $M\setminus\Omega$. Из нашего предположения о гладкости Γ следует, что $w\in C^1(\bar{M})$ и $w=|\operatorname{grad} w|=0$ в $M\setminus\Omega$.

Перед тем как двигаться дальше, полезно напомнить принцип максимума для смешанной краевой задачи. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, и предположим, что Γ_1 и Γ_2 — открытые подмножества $\partial\Omega$, причем

$$\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing,\quad \bar{\Gamma}_1\cup\Gamma_2=\partial\Omega. \tag{5.4, i}$$

Наконец, предположим, что Γ_1 «достаточно велика», так что форма Дирихле коэрцитивна на функциях, равных нулю на Γ_1, т. е.

$$\|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\leqslant C\|\zeta_x\|_{L^2(\Omega)}\quad\text{для}\quad \zeta=0\quad\text{на}\quad\Gamma_1, \tag{5.4, ii}$$

$\zeta\in H^1(\Omega)$, с константой $C>0$ (не зависящей от ζ).

Легко доказать существование единственного решения $u \in H^1(\Omega)$ задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \partial u/\partial \nu &= h \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

для заданных $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ и $h \in L^2(\Gamma_2)$, где ν обозначает внешнюю нормаль к Γ_2. Действительно, пусть V_g и V_0 — аффинные подмножества пространства $H^1(\Omega)$ функций v, таких что $v = g$ на Γ_1 и $v = 0$ на Γ_1 соответственно. Тогда u является решением слабой задачи

$$u \in V_g: \quad \int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega f\zeta\,dx + \int_{\Gamma_2} h\zeta\,d\sigma \quad \forall \zeta \in V_0. \tag{5.6}$$

Ввиду (5.4, ii) существование является следствием теоремы 2.1 гл. II.

Предложение 5.2. *Пусть* Ω *удовлетворяет* (5.4), *а* u *— решение задачи* (5.5), *где* $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ *и* $h \in L^2(\Gamma_2)$. *Тогда если* $f \leqslant 0$ *в* Ω *и* $h \leqslant 0$ *на* Γ_2, *то* $\max\limits_\Omega u \leqslant \max\limits_{\Gamma_1} g$.

Доказательство предложения легко получить, взяв в (5.6) $\zeta = \max(u-k, 0) \in V_0$, где $k = \max\limits_{\Gamma_1} g$.

Лемма 5.3. *Пусть* w *— функция, определенная в* (5.3). *Тогда* $w \in H^1(M)$, $w \geqslant 0$ *и* $w_{x_3} \leqslant 0$ *в* M.

Доказательство. Очевидно, что $w \in H^1(M)$. Далее, $w_{x_3} = x_3 - u \in H^1(\Omega)$ и удовлетворяет соотношениям $\Delta w_{x_3} = 0$ в Ω, $w_{x_3} = x_3 - H \leqslant 0$ на $\bar{G}_1$, $w_{x_3} = x_3 - h \leqslant 0$ на $\bar{G}_2$, $w_{x_3} = 0$ на $\bar{G}_2^+ \cup \Gamma$. Кроме того, $\partial w_{x_3}/\partial\nu = 0$ на $S^+ \cup S^-$ и $\partial w_{x_3}/\partial \nu = -1$ на B. Поэтому, в силу предложения 5.2, $w_{x_3} \leqslant 0$ в Ω. Отсюда следует утверждение леммы. ∎

Для описания выпуклого множества допустимых функций, которое появится при выводе вариационного неравенства, исследуем граничные условия для w. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} &w(x) = \tfrac{1}{2}(H - x_3)^2, && x \in G_1, \\ &w(x) = \tfrac{1}{2}(h - x_3)^2, && x \in G_2, \\ &w(x) = 0, && x \in G_2^+, \\ &w_{x_1}(x) = 0, && x \in \partial M, \quad x_1 = 0 \text{ или } x_1 = a. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Кроме того, докажем такую лемму.

Лемма 5.4. *Пусть* $\alpha_0(x')$, $x' \in \bar{B}$, *обозначает решение смешанной задачи*

$$
\begin{aligned}
&-\Delta\alpha_0 = 0 && \text{в} \quad B, \\
&\alpha_0 = \tfrac{1}{2}H^2 && \text{для} \quad x_2 = g_1(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant a, \\
&\alpha_0 = \tfrac{1}{2}h^2 && \text{для} \quad x_2 = g_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant a, \\
&\partial\alpha_0/\partial x_1 = 0 && \text{для} \quad \begin{matrix} x_1 = 0, & g_1(0) < x_2 < g_2(0), \\ x_1 = a, & g_1(a) < x_2 < g_2(a). \end{matrix}
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Тогда

$$\tfrac{1}{2}h^2 \leqslant \alpha_0 \leqslant \tfrac{1}{2}H^2 \quad \text{в} \quad B \tag{5.9}$$

и решение w *задачи* (5.3) *удовлетворяет в* B *условию* $w = \alpha_0$.

Доказательство. Заметим сначала, что в B существует липшицева функция, принимающая на кривых $x_2 = g_1(x_1)$ и $x_2 = g_2(x_1)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, граничные значения, требуемые для α_0. Следовательно, у задачи (5.8) существует единственное решение $\alpha_0 \in H^1(B)$. Применяя предложение 5.2 к α_0 и $-\alpha_0$, получим (5.9).

Отметим, что $w_{x_1x_3} = -u_{x_1}$ и $w_{x_2x_3} = -u_{x_2}$, следовательно,

$$w_{x_j}(x', 0) = -\int_0^{\varphi(x')} u_{x_j}(x', x_3)\,dx_3, \quad j = 1, 2.$$

Пусть функция $\psi(x') \in C^\infty(B)$ равна нулю около кривых $x_2 = g_1(x_1)$ и $x_2 = g_2(x_1)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Тогда, взяв $\zeta(x) = \psi(x')$ и применив теорему Фубини, получим, что

$$
\begin{aligned}
&\int_B [w_{x_1}(x', 0)\,\psi_{x_1}(x') + w_{x_2}(x', 0)\,\psi_{x_2}(x')]\,dx' = \\
&\quad = -\int_B \int_0^{\varphi(x')} [u_{x_1}(x', x_3)\,\psi_{x_1}(x') + u_{x_2}(x', x_3)\,\psi_{x_2}(x')]\,dx_3\,dx' = \\
&\quad = -\int_B \int_0^{\varphi(x')} u_{x_j}(u)\,\zeta_{x_j}(x)\,dx = -\int_\Omega u_{x_j}(x)\,\zeta_{x_j}(x)\,dx = 0,
\end{aligned}
$$

так как u является решением задачи 5.1. Поэтому $w(x', 0)$ — решение задачи (5.8). Теперь утверждение леммы следует из единственности решения задачи (5.8). ∎

Позволим себе некоторую вольность в обозначениях и будем впредь понимать символы S^+ и S^- в следующем смысле:

$$
\begin{aligned}
S^- &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, \quad g_1(0) < x_2 < g_2(0), \quad 0 < x_3 < H\} \subset \partial M, \\
S^+ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = a, \quad g_1(a) < x_2 < g_2(a), \quad 0 < x_3 < H\} \subset \partial M.
\end{aligned}
$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 3.5 и оставляется читателю.

Лемма 5.5. *Пусть w — функция, определенная в* (5.3). *Тогда для любой $\zeta \in C^\infty(\bar{M})$, равной нулю около $\partial M \setminus (S^+ \cup S^-)$,*

$$\int_M w_{x_j} \zeta_{x_j} \, dx + \int_M I_\Omega \zeta \, dx = 0,$$

где I_Ω — характеристическая функция множества Ω.

Положим $G_2^{++} = \{x \mid x_2 = g_2(x_1),\ 0 < x_1 < a,\ h < x_3 < H\}$ и определим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0(x') & \text{на } \bar{B}, \\ \frac{1}{2}(H - x_3)^2 & \text{на } \bar{G}_1, \\ \frac{1}{2}(h - x_3)^2 & \text{на } \bar{G}_2, \\ 0 & \text{на } \overline{G_2^{++}}, \\ 0 & \text{на } \bar{T}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Множество

$$K = \{v \in H^1(M) \mid v \geq 0 \text{ в } M \text{ и } v = \alpha \text{ на } \partial M \setminus (S^+ \cup S^-)\} \tag{5.11}$$

является выпуклым замкнутым непустым подмножеством пространства $H^1(M)$. Чтобы доказать, что K не пусто, продолжим просто α до неотрицательной функции из $H^1(M)$. Например, пусть $\theta(x') \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, причем $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ около кривой $x_2 = g_1(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq a$, и $\theta = 0$ около кривой $x_2 = g_2(x_1)$, $0 \leq x_1 \leq a$. Пусть $\psi(x_3) \in C^\infty(\mathbb{R})$, причем $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(0) = 1$ и $\psi = 0$ при $x_3 \geq h$. Продолжим α на M с помощью формулы

$$\begin{aligned} \alpha(x) = \tfrac{1}{2}[2\alpha_0(x') - 2Hx_3 + x_3^2]\,\theta(x') + \\ + [1 - \theta(x')]\left\{\tfrac{1}{2}[2\alpha_0(x') - 2hx_3 + x_3^2]\,\psi(x_3) + \right. \\ \left. + \tfrac{1}{2}[\max(h - x_3, 0)]^2[1 - \psi(x_3)]\right\} - \tfrac{1}{2}\theta(x')[2\alpha_0(x') - H^2]\frac{x_3}{H}. \end{aligned} \tag{5.11'}$$

Такое продолжение имеет то преимущество, что $\alpha \in H^{2,s}(M)$, если $\alpha_0 \in H^{2,s}(B)$; это свойство поможет нам в наших рассмотрениях, связанных с гладкостью. Итак, $K \neq \varnothing$ независимо от того, существует u или нет.

Теорема 5.6. *Пусть $\{u(x), \varphi(x')\}$ — решение задачи 5.1 с $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и гладкой $\varphi(x')$. Определим w соотношениями*

$$\begin{aligned} &w_{x_3} = x_3 - u \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\colon \quad x_3 = \varphi(x'), \quad x' \in B, \end{aligned} \tag{5.3'}$$

и продолжим w нулем в $M \setminus \Omega$. Тогда

$$w \in K\colon \quad \int_M w_{x_i}(v - w)_{x_i} \, dx \geq -\int_M (v - w)\, dx \quad \forall v \in K, \tag{5.12}$$

причем K определено в (5.11). *Кроме того,*

$$\Omega = \{x \in M \mid w(x) > 0\}.$$

Доказательство. В силу лемм 5.3 и 5.4, $w \in K$. Пусть теперь $v \in K$. Вследствие леммы 5.5

$$\int_M w_{x_i}(v-w)_{x_i}\,dx + \int_M (v-w)\,dx =$$
$$= \int_M w_{x_i}(v-w)_{x_i}\,dx + \int_M I_\Omega (v-w)\,dx + \int_{M\setminus\Omega} (v-w)\,dx =$$
$$= \int_{M\setminus\Omega} v\,dx \geqslant 0,$$

так как $v - w \in H^1(M)$ обращается в нуль на $\partial M \setminus (S^+ \cup S^-)$. ∎

Следствие 5.7. *Задача* 5.1 *допускает не более одного решения.*

Это справедливо, конечно, потому, что вариационное неравенство (5.12) имеет единственное решение.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Как и в § 4, будем искать решение задачи 5.1 с помощью вариационного неравенства (5.12). Кроме того, мы обсудим свойства свободной границы. И снова наш первый шаг — доказательство гладкости $w(x)$.

Теорема 6.1. *Существует единственное решение $w(x)$ вариационного неравенства* (5.12). *При этом $w \in H^{2,s}(M) \cap C^{1,\lambda}(\bar{M})$ при $1 \leqslant s < \infty$ и $0 < \lambda < 1$.*

Существование и единственность w являются следствием теоремы 2.1 гл. II. Для доказательства гладкости w мы должны проверить, что решение u задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{в} \quad M, \\ u &= h \quad \text{в} \quad \partial M \setminus (S^+ \cup S^-), \\ \partial u/\partial \nu &= 0 \quad \text{на} \quad S^+ \cup S^- \end{aligned} \tag{6.1}$$

принадлежит $H^{2,s}(M)$, если $f \in L^s(M)$ и $h \in H^{2,s}(M)$, и, кроме того, проверить, что граничное условие $\alpha(x)$, определенное в (5.10), является сужением функции из $H^{2,s}(M)$. Доказательства обоих этих утверждений аналогичны нашему обсуждению задачи (4.1): сложности возникают в ребрах M и вершинах основания B, но в обоих случаях функции можно продолжить до решений уравнений в $H^{2,\infty}$-областях. При этом важную роль играют условия (5.1). Их достаточно для применения теории о гладкости решений эллиптических задач. Мы сформулируем эти факты в виде лемм, доказательства которых оставим в качестве упражнений.

Лемма. 6.2. *Пусть* $\alpha_0(x')$, $x' \in B$ — *решение задачи* (5.8). *Тогда* $\alpha_0 \in H^{2,s}(B)$ *и, следовательно,* $\alpha \in H^{2,s}(M)$, *где* α — *функция* (5.11′).

Лемма 6.3. *Пусть* u — *решение задачи* (6.1) *с* $f \in L^s(M)$ *и* $h \in H^{2,s}(M)$, $1 < s < \infty$. *Тогда* $u \in H^{2,s}(M)$.

Определим

$$u(x) = x_3 - w_{x_3}(x), \quad x \in M,$$
$$\Omega = \{x \in M \mid w(x) > 0\}, \tag{6.2}$$

где w — решение неравенства (5.12). Таким образом, $u \in C^{0,\lambda}(\bar\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω.

Лемма 6.4. *Пусть* w — *решение задачи* (5.12). *Тогда* $w_{x_3}(x) \leqslant 0$ *для* $x \in M$ *и, следовательно,* $w_{x_3}(x) < 0$, *а* $u(x) > x_3$ *для* $x \in \Omega$.

Доказательство. Полезно отметить, что так как $\alpha_0 > 0$ на $\bar B$, а функция w непрерывна, то при некотором $\delta > 0$ существует «плита» $B \times (0, \delta) \subset \Omega$. Поэтому $B \subset \partial\Omega$.

В Ω w_{x_3} — гармоническая функция. Для $x \in \partial\Omega \cap M$ имеем $w(x) = |\operatorname{grad} w(x)| = 0$, поэтому $w_{x_3}(x) = 0$. Предположим теперь, что $x \in \partial\Omega \setminus M$. Если $x \in \bar G_1 \cup \bar G_2 \cup \bar G_2^{++} \cup T$, то $w_{x_3}(y) \leqslant 0$ или в силу прямых вычислений, или в случае $x \in T$ потому, что $w \geqslant 0$ в M и $w(x) = 0$. Если $x \in B \subset \partial\Omega$, то

$$w_{x_3x_3}(x) = 1 - [w_{x_1x_1}(x) + w_{x_2x_2}(x)] = 1 - \Delta\alpha_0(x) = 1 > 0.$$

Таким образом, x не может быть точкой, где w_{x_3} достигает своего максимума.

Наконец, предположим, что $x \in S^+ \cup S^-$, скажем $x \in S^-$, и $w_{x_3}(x) \neq 0$. Тогда, в силу непрерывности w_{x_3}, существует окрестность x в M, где $w_{x_3} \neq 0$, и, следовательно, существует окрестность x в M, где $w > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $B_\varepsilon(x) \cap M \subset \Omega$, поэтому $B_\varepsilon(x) \cap S^- \subset \partial\Omega$. Так как $\Delta w = 1$ в $B_\varepsilon(x) \cap M$ и $w_{x_1} = 0$ на $B_\varepsilon(x) \cap S^-$, то w — гладкая функция в $B_\varepsilon(x) \cap \bar M$. Можно вычислить теперь, что $w_{x_1x_3} = 0$ в $B_\varepsilon(x) \cap S^-$, поэтому, в частности, x не может быть точкой, в которой w_{x_3} достигает экстремального значения. Следовательно,

$$\max_{\partial\Omega} w_{x_3} = \max_{G_1 \cup G_2 \cup G_2^{++} \cup T} w_{x_3} \leqslant 0$$

и, в силу принципа максимума, $w_{x_3}(x) < 0$ в Ω. ∎

Из леммы следует, что w убывает вдоль каждой прямой, параллельной оси x_3. Введем

$$\varphi(x') = \inf\{x_3 \mid x = (x', x_3) \in \bar M \setminus \Omega\} =$$
$$= \inf\{x_3 \mid w(x', x_3) = 0\}, \quad x' \in B. \tag{6.3}$$

Из непрерывности w вытекает, что $\varphi(x_0') \leqslant \liminf\limits_{x' \to x_0'} \varphi(x')$, $x_0' \in B$.

Определим следующее множество точек Γ:

$$\Gamma: \ x_3 = \varphi(x'), \quad x' \in B, \tag{6.4}$$

Заметим, что Ω допускает описание

$$\Omega = \{x \in M \mid x_3 < \varphi(x'), \quad x' \in B\}. \tag{6.5}$$

Лемма 6.5. *Пусть w — решение неравенства* (5.12). *Тогда* $w_{x_3}(x) = 0$ *для* $x \in T$.

Доказательство. Наше доказательство основывается на идее, отличной от используемой в лемме 4.5. Пусть $v(x) = \frac{1}{2}(H - x_3)^2$. Мы утверждаем, что $v - w \geqslant 0$ в Ω. Так как эта разность является гармонической функцией в Ω, необходимо только вычислить ее значения на $\partial\Omega$. Имеем

$$\begin{aligned} &v(x) = w(x) = 0, && \text{если} \quad x \in T, \\ &v(x) \geqslant 0 = w(x), && \text{если} \quad x \in M \cap \partial\Omega, \\ &v(x) \geqslant w(x), && \text{если} \quad x \in \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 \cup \bar{G}_2^{++}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

и, в силу (5.9), $v(x) = \frac{1}{2}H^2 \geqslant \alpha_0(x) = w(x)$, если $x \in B \subset \partial\Omega$.

Рассмотрим, наконец, $(S^+ \cup S^-) \cap \partial\Omega$. Будем рассуждать как в последней лемме. Ввиду описания Ω, данного в (6.5), для каждого $x \in (S^+ \cup S^-) \cap \partial\Omega$ можно найти шар B_δ в $\bar{\Omega}$ с $x \in \partial B_\delta$, если только x не принадлежит $\overline{(\partial\Omega \cap M)}$, где (6.6) выполняется по непрерывности. В силу принципа максимума Хопфа, в каждой такой точке x, где $v - w$ достигает экстремума, ее нормальная производная не обращается в нуль. Но так как w — решение неравенства (5.12), то

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(v - w) = \pm \frac{\partial}{\partial x_1}(v - w) = 0 \quad \text{на} \quad S^+ \cup S^-.$$

Следовательно, $v - w \geqslant 0$ в Ω.

Для $x \in M \setminus \Omega$ разность $v(x) - w(x) = v(x) \geqslant 0$. Поэтому $w(x) \leqslant v(x)$ в M и $w(x) = v(x) = 0$ на T; следовательно,

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x_3}(x) \leqslant \frac{\partial w}{\partial x_3}(x) \leqslant 0, \quad x \in T. \ \blacksquare$$

Пока мы не можем показать, что $\{u, \varphi\}$ является решением нашей задачи, но мы можем сделать следующий промежуточный шаг.

Теорема 6.6. *Пара* $\{u, \varphi\}$, *определенная в* (6.2), (6.3), *является слабым решением задачи* 5.1. *Другими словами,* $\int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = 0$ *для всех* $\zeta \in H^1(M)$, *обращающихся в нуль около* $G_1 \cup G_2 \cup G_2^{++}$, *причем*

$$u = H \quad \text{на} \quad G_1, \quad u = \begin{cases} h & \text{на} \quad G_2, \\ x_3 & \text{на} \quad G_2^{++} \cap \bar{\Omega}, \end{cases}$$

$$\text{и} \quad u = x_3 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Доказательство. Действительно, для любой ζ, равной нулю около $G_1 \cup G_2 \cup G_2^{++}$, получаем, что

$$\int_\Omega u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx = \int_\Omega [-w_{x_1x_3}\zeta_{x_1} - w_{x_2x_3}\zeta_{x_2} + (1 - w_{x_3x_3})\zeta_{x_3}]\,dx =$$

$$= \int_\Omega (-w_{x_1x_3}\zeta_{x_1} - w_{x_2x_3}\zeta_{x_2} + w_{x_1x_1}\zeta_{x_3} + w_{x_2x_2}\zeta_{x_3})\,dx =$$

$$= \int_M (-w_{x_1x_3}\zeta_{x_1} - w_{x_2x_3}\zeta_{x_2} + w_{x_1x_1}\zeta_{x_3} + w_{x_2x_2}\zeta_{x_3})\,dx =$$

$$= \int_M (w_{x_1}\zeta_{x_1x_3} + w_{x_2}\zeta_{x_2x_3} - w_{x_1}\zeta_{x_1x_3} - w_{x_2}\zeta_{x_2x_3})\,dx -$$

$$- \int_{\partial M} (w_{x_1}\zeta_{x_1} + w_{x_2}\zeta_{x_2})\,dx_1\,dx_2 + \int_{\partial M} w_{x_1}\zeta_{x_3}\,dx_2\,dx_3 +$$

$$+ \int_{\partial M} w_{x_2}\zeta_{x_3}\,dx_1\,dx_3 = - \int_{B \cup T} (w_{x_1}\zeta_{x_1} + w_{x_2}\zeta_{x_2})\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

так как $w|_B = \alpha_0$ — гармоническая функция и $w = 0$ на T. Напомним, что $w_{x_1} = 0$ на $S^+ \cup S^-$ и ζ обращается в нуль около $G_1 \cup G_2 \cup G_2^{++}$.

Другие свойства u очевидны. Заметим, в частности, что $u(x) > x_3$ при $x \in \Omega$, $u(x) = x_3$ при $x \in \Gamma$. ∎

Теперь мы должны показать, что $\{\varphi, u\}$ — классическое решение задачи 5.1. Для этого необходимо исследовать гладкость Γ. Мы начнем наш анализ со следующей теоремы.

Теорема 6.7. *Пусть w — решение неравенства* (5.12), *а Γ — свободная граница: $x_3 = \varphi(x')$, $x' \in B$. Тогда φ — липшицева функция в B.*

Зная только определение Γ, нельзя быть уверенным даже в том, что $\Gamma \cap M$ замкнуто в M. Теорема указывает, что $\partial\Omega \cap M \subset \Gamma$. То, что $\Gamma = \partial\Omega \cap M$, или, иначе, что $\varphi(x') < H$ для $x \in B'$, будет следовать из гладкости φ. Для доказательства теоремы мы сначала обсудим несколько лемм.

Лемма 6.8. *Продолжим w на $B \times (0, 2H)$, положив*

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x), & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{w} \in H^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(B \times (0, 2H))$.

Доказательство. Мы знаем, что $w \in H^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(M)$. Наша цель — показать, что $w_{x_ix_j} \in L^\infty$ около T, верхней грани M. В силу леммы 6.5, доказательство этого факта совсем просто. Действительно, мы утверждаем, что $\tilde{w}$ является решением вариационного неравенства

$$\tilde{w} \in \tilde{K}: \quad \int_D \tilde{w}_{x_i}(v - \tilde{w})_{x_i}\,dx \geq - \int_D (v - \tilde{w})\,dx \quad \forall v \in \tilde{K},$$

где $D=B\times(0,\ 2H)$ и $\tilde{K}=\{v\in H^1(D)\,|\,v\geqslant 0$ в D, $v=\alpha$ на $\partial M\setminus(S^+\cup S^-\cup T)$, $v=0$ на $\partial D\setminus\partial M\}$, α определено, как обычно, соотношением (5.10).

Для $v\in\tilde{K}$ произведение

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\nu}(v-\tilde{w})=\frac{\partial w}{\partial\nu}(v-w)=0\quad\text{на}\quad\partial M.$$

Это следует из граничных условий на $\partial M\setminus T$, а на T, в силу леммы 6.5, $w_\nu(v-w)=w_{x_3}(v-w)=0$. Поэтому

$$\int_D\tilde{w}_{x_i}(v-\tilde{w})_{x_i}\,dx=\int_M w_{x_i}(v-w)_{x_i}\,dx=$$

$$=-\int_M\Delta w\,(v-w)\,dx+\int_{\partial M}\frac{\partial w}{\partial\nu}(v-w)\,dx=-\int_\Omega(v-w)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant-\int_\Omega(v-w)\,dx-\int_{D\setminus\Omega}v\,dx=-\int_D(v-w)\,dx.$$

В силу теоремы 6.3 гл. IV, $\tilde{w}\in H^{2,\infty}_{\text{loc}}(D)$. ∎

Лемма 6.9. *Пусть* $x_0\in\Gamma$ *и* $B_r(x_0)\subset B\times(0,\ 2H)$. *Тогда существует конус* $\Lambda_r\subset\mathbb{R}^3_+=\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,x_3>0\}$, *такой что* $\frac{\partial w}{\partial\xi}(x)=w_x(x)\cdot\xi\leqslant 0$ *для* $x\in B_{r/2}(x_0)$ *и* $\frac{\partial w}{\partial\xi}(x)<0$ *для* $x\in\Omega\cap B_{r/2}(x_0)$, *как только* $\xi\in\Lambda_r\cap S^2$.

Доказательство. Определим $\zeta(x)\in C^{1,1}(\overline{B_r(x_0)})\subset H^{2,\infty}(B_r(x_0))$ с помощью формулы

$$\zeta(x)=\begin{cases}0, & \rho\leqslant r/2,\\ (4/r^2)\left(\rho-\frac{1}{2}r\right)^2, & r/2\leqslant\rho\leqslant r,\end{cases}\qquad\rho=|x-x_0|,$$

и для $0\neq\xi\in\mathbb{R}^3$ и $\varepsilon>0$ положим

$$v(x)=\xi\cdot w_x(x)+w(x)-\varepsilon\zeta(x),\quad x\in B_r(x_0).$$

Так как $\Delta v=\Delta w-\varepsilon\Delta\zeta=1-\varepsilon\Delta\zeta\geqslant 0$ в $\Omega\cap B_r(x_0)$ для достаточно малых $\varepsilon=\varepsilon(r)$, то

$$v(x)\leqslant\max_{\partial(\Omega\cap B_r(x_0))}v,\quad x\in B_r(x_0)\cap\Omega.$$

Предположим, что $x\in\Gamma$. Тогда если $x\in M$, то $w(x)=|\operatorname{grad}w(x)|=0$, а если $x\in T$, то, в силу леммы 6.5, $w(x)=|\operatorname{grad}w(x)|=0$. Таким образом, $v\leqslant 0$, $x\in\Gamma$. Для любого другого $x\in\partial(\Omega\cap B_r(0))$ справедливо включение $x\in\partial B_r(0)\cap\Omega$. Рассмотрим два случая. Сначала предположим, что $w(x)\leqslant\varepsilon/2$. Так как $w_{x_j}(x)$ — липшицева функция в $B_r(x_0)$, равная нулю при $x=x_0$, то, применяя предыдущую лемму,

получим, что

$$v(x)=\xi_1 w_{x_1}(x)+\xi_2 w_{x_2}(x)+\xi_3 w_{x_3}(x)+w(x)-\varepsilon\zeta(x)\leqslant$$
$$\leqslant C_1(r)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}+\xi_3 w_{x_3}(x)+\varepsilon/2-\varepsilon.$$

Когда $\xi_3\geqslant 0$, то, в силу леммы 6.4, $\xi_3 w_{x_3}(x)\leqslant 0$. Выбирая $\xi_1^2+\xi_2^2$ достаточно малым, скажем $C_1\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\leqslant\varepsilon/2$, получим, что $v(x)\leqslant 0$ при $\rho=r$ и $w(x)\leqslant\varepsilon/2$.

С другой стороны, если $w(x)\geqslant\varepsilon/2>0$, то $w_{x_3}(x)<0$ и, значит,

$$v(x)\leqslant\varepsilon/2+\xi_3 w_{x_3}(x)+w(x)-\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant-\varepsilon/2+\xi_3\sup_{\{w\geqslant\varepsilon/2\}\cap B_r(x_0)} w_{x_3}+\sup_{B_r(x_0)} w\leqslant$$
$$\leqslant 0\quad\text{при}\quad\rho=r,\quad w(x)\geqslant\varepsilon/2,$$

когда ξ_3 достаточно велико. Таким образом, $v(x)\leqslant 0$ в $\Omega\cap B_r(x_0)$. В частности, $\zeta(x)=0$ при $\rho\leqslant r/2$ и, значит, $\xi\cdot w_x\leqslant\xi\cdot w_x+w\leqslant 0$ в $B_{r/2}(x_0)$. ∎

Доказательство теоремы 6.7. По заданному $x_0\in\Gamma$ выберем $r>0$ так, чтобы $B_r(x_0)\subset B\times(0,\ 2H)$, как в предыдущей лемме, и возьмем $x\in\Gamma\cap B_{r/4}(x_0)$. Тогда w убывает по любому пути $x+t\xi$, $0\leqslant t\leqslant r/4$, $\xi\in\Lambda_r\cap S^2$. Мы можем взять Λ_r открытым в $\mathbb{R}^3$, поэтому, в силу равенства $w(x)=0$, множество

$$x+\{t\xi\mid 0<t<r/4,\ \xi\in\Lambda_r\cap S^2\}\subset M\setminus\bar{\Omega}.$$

Предположим также, что $w(y)=0$ и

$$y\in x+\{t\xi\mid -r/4<t<0,\ \xi\in\Lambda_r\cap S^2\}.$$

Тогда $x\in y+\{t\xi\mid 0<t<r/4,\ \xi\in\Lambda_r\cap S^2\}\subset M\setminus\bar{\Omega}$, что противоречит включению $x\in\Gamma$. Следовательно,

$$x+\{t\xi\mid -r/4<t<0,\ \xi\in\Lambda_r\cap S^2\}\subset\Omega.$$

Но это показывает, что φ — липшицева функция. ∎

Следствие 6.10. *Пусть w — решение неравенства* (5.12), *функции u, φ определены соотношениями* (6.2), (6.3), *а Γ — соотношением* (6.4). *Тогда Γ — аналитическая поверхность, а $\{u,\ \varphi\}$ — классическое решение задачи* 5.1.

Доказательство. Так как поверхность Γ липшицева, то применим критерий 2.20 из гл. VI. Следовательно, Γ — класса C^1 и $w_{x_i x_j}\in C(\Omega\cup\Gamma)$. Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 2.1 гл. VI. ∎

Следствие 6.11. *При предыдущих обозначениях $\varphi(x')<H$ для $x'\in B$.*

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x_0') = H$, так что $(x_0', H) \in \in \Gamma \cap T$. Сравним еще раз $\frac{1}{2}(H - x_3)^2$ с w в Ω, но теперь, в силу гладкости φ, лемму Хопфа о граничной точке можно применить к (x_0', H). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}(H - x_3)^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_3} w \neq 0 \quad \text{в} \quad (x_0', H).$$

Но каждый член равен нулю. В силу этого противоречия предположение $\varphi(x_0') = H$ неверно. ∎

7. ОБТЕКАНИЕ ЗАДАННОГО ПРОФИЛЯ: ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

Определение потока жидкости, обтекающего заданный профиль, состоит в установлении скорости жидкости в каждой точке области в предположении, что эта скорость подчинена некоторым условиям на профиле и на бесконечности. Покажем здесь, как один особенно простой случай можно свести к вариационному неравенству. Это случай обтекания стационарным безвихревым потоком несжимаемой жидкости симметричного выпуклого профиля в $\mathbb{R}^2$. Исходная функция тока будет преобразована в неизвестную функцию из вариационного неравенства, аналогично тому, как это делалось при изучении задачи фильтрации. При этом, однако, областью определения неизвестной функции вариационного неравенства будет плоскость годографа потока жидкости. Параметры вариационного неравенства будут зависеть только от заданного профиля, заданной на бесконечности скорости жидкости и какой-нибудь оценки максимума скорости жидкости во всей области. Эта оценка может быть получена a priori (см. теорему 8.7).

Чтобы формализовать нашу физическую проблему, предположим, что в $\mathbb{R}^2$ задан замкнутый выпуклый профиль $\mathscr{P}$, симметричный относительно оси x, и начало координат содержится внутри $\mathscr{P}$. Пусть $G = \mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{P}$ — открытое множество и ν — внешняя нормаль к $\mathscr{P}$, которую мы предположим определенной везде на $\partial\mathscr{P}$, за исключением, быть может, двух точек, A и B с координатой $y = 0$.

Задача 7.1. *Найти скорость* $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, *определенную на* $\bar{G}$ *и удовлетворяющую условиям:*

(i) $\mathbf{q}$ — *векторное поле класса* C^1 *в* G, *непрерывное на* $\bar{G}$;

(ii) $\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0$ *в* G;

(iii) $\operatorname{rot} \mathbf{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0$ *в* G;

(iv) $\mathbf{q} \cdot \nu = 0$ *на* ∂G;

(v) $q_1(x, y) \to q_\infty$ *и* $q_2(x, y) \to 0$ *при* $(x, y) \to \infty$;

(vi) $q_1(x, y) = q_1(x_1, -y)$ *и* $q_2(x, y) = -q_2(x, -y)$ (*симметрия*).

Здесь $q_\infty > 0$ — *заданное число.*

Предположим теперь, что решение $\mathbf{q}$ задачи 7.1 существует. Тогда, в силу (ii) и (iii), локально в G существуют две функции φ и ψ, такие что

$$\varphi_x = \psi_y = q_1 \quad \text{и} \quad \varphi_y = -\psi_x = q_2. \tag{7.1}$$

Эти функции называются соответственно потенциалом скорости и функцией тока, и приведенные выше соотношения утверждают, что они удовлетворяют уравнениям Коши — Римана. Кроме того, функция комплексного переменного

$$V(z) = q_1(x, y) - iq_2(x, y), \qquad z = x + iy \quad \text{в} \quad G, \tag{7.2}$$

определена и голоморфна в любой точке области G.

Исследуем некоторые свойства V, полезные при изучении вопроса о существовании решения задачи 7.1. В силу (v), мы видим, что $V(z) \to q_\infty$ при $|z| \to \infty$, следовательно, V допускает разложение $V(z) = q_\infty + \sum\limits_1^\infty \frac{a_n}{z^n}$ около $z = \infty$. Из-за условия симметрии (vi)

$$V(\bar{z}) = \overline{V(z)}, \tag{7.3}$$

и поэтому $a_n \in \mathbb{R}$ при $n \geqslant 1$. Выбирая направление обхода против часовой стрелки для контура $\partial\mathscr{P} = \partial G$, получим, в силу теоремы Коши, что $\int\limits_{\partial G} V(z)\, dz = 2\pi i a_1$. Кроме того,

$$\int\limits_{\partial G} V(z)\, dz = \int\limits_{\partial G} q_1\, dx + q_2\, dy + i \int\limits_{\partial G} q_1\, dy - q_2\, dx.$$

В силу граничного условия (iv), $q_1\, dy - q_2\, dx = 0$ на ∂G и, значит, интеграл является вещественным. Поэтому $a_1 = 0$, что означает, что циркуляция симметричных потоков около $\mathscr{P}$ равна нулю. Следовательно, в G существует такая однозначная голоморфная функция $\Phi(z)$, что $\Phi'(z) = V(z)$, причем $\Phi(z)$ допускает разложение

$$\Phi(z) = q_\infty z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nz^n} \quad \text{около} \quad z = \infty. \tag{7.4}$$

Функции $\varphi = \operatorname{Re}\Phi$ и $\psi = \operatorname{Im}\Phi$ являются соответственно потенциалом скорости и функцией тока. Эти функции гармоничны в G и, в силу непрерывности $\mathbf{q}$, принадлежат $C^1(\bar{G})$. Кроме того, вследствие (7.3) $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$; таким образом, $\psi(x, -y) = -\psi(x, y)$ для $z \in G$ и, в частности, $\psi(x, 0) = 0$, $z = x \in G$. В G справедливы также соотношения (7.1). Более того, в силу (iv), тангенциальная производная ψ равна нулю на $\partial\mathscr{P}$, а поэтому $\psi = 0$ на $\partial\mathscr{P}$.

Теорема 7.2. *Пусть $\partial\mathscr{P}_+ = \partial\mathscr{P} \cap \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, и предположим, что $\partial\mathscr{P}_+$ — кривая класса $C^{2,\lambda}$, включая ее концы. Тогда существует единственное решение задачи* 7.1.

Мы предполагаем, конечно, что $\mathcal{P}$ — выпуклый профиль.

Доказательство. Для проверки единственности достаточно проверить единственность ψ. Заметим, что для любых двух функций тока ψ и $\tilde{\psi}$ разность $\psi - \tilde{\psi}$ есть гармоническая в G функция, равная нулю на $\partial\mathcal{P}$ и стремящаяся к 0 на ∞. В силу принципа максимума, $\psi - \tilde{\psi} = 0$.

Существование является следствием теоремы Римана о конформных отображениях. Пусть f — конформное отображение G на $D = \{\zeta \mid |\zeta| > 1\}$, такое что $f(\infty) = \infty$ и $f'(\infty) > 0$. Тогда f — взаимно однозначное голоморфное отображение области G, $f'(z) \neq 0$, $|f(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$ и $f'(z)$ стремится к положительному пределу при $|z| \to \infty$. Кроме того, f непрерывно отображает $\bar{G}$ на $\bar{D}$.

Так как область G симметрична, а f указанными выше свойствами определяется однозначно, то $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Определим теперь

$$\Phi(z) = \frac{q_\infty}{f'(\infty)}\left[f(z) + \frac{1}{f(z)}\right], \quad z \in G,$$

и положим $V(z) = \Phi'(z)$. Тогда функция V голоморфна в G и $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$, поэтому выполнены условия (ii), (iii) и (vi). Так как

$$V(z) = \frac{q_\infty}{f'(\infty)} f'(z)\left[1 - \frac{1}{f(z)^2}\right], \quad z \in G,$$

то $V(z) \to q_\infty$ при $|z| \to \infty$. Кроме того,

$$\psi(z) = \operatorname{Im}\Phi(z) = [q_\infty/f'(\infty)](1 - |f(z)|^{-2}) \operatorname{Im} f(z) \tag{7.5}$$

и, следовательно, $\psi = 0$ на $\partial\mathcal{P}$.

Остается показать, что $\mathbf{q} = (\psi_y, -\psi_x)$ непрерывно в $\bar{G}$. Как только это становится известным, (iv) следует из равенства нулю ψ на ∂G. Мы оставляем эти детали читателю. ∎

Пусть A и B — концы кривой $\partial\mathcal{P}_+$, определяемой в формулировке теоремы. Заметим, что $\mathbf{q}(A) = \mathbf{q}(B) = 0$, так как $q_2(x, 0) = 0$ и $\lim\limits_{\substack{z \to A \\ z \in \partial\mathcal{P}_+}} \mathbf{q}\cdot\mathbf{v} = 0$, а односторонний предел $\mathbf{v}$ при $z \to A$ по предположению отличен от $(0, \pm 1)$.

Установим несколько полезных для дальнейшего свойств ψ.

Предложение 7.3. *Пусть ψ — функция тока задачи* 7.1. *Тогда $\psi(z) > 0$ для $z \in G_+ = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.*

Доказательство. В силу (7.5), функции $\psi(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ имеют одинаковый знак. Кроме того, f отображает $G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ на $D \cap \cap \{\zeta \mid \operatorname{Im}\zeta = 0\}$ с $f'(\infty) > 0$. Следовательно, $f(G_+) = \{\zeta \in D \mid \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и, значит, $\operatorname{Im} f(z) > 0$ для $z \in G_+$. ∎

Предложение 7.4. *Пусть ψ — функция тока задачи* 7.1. *Тогда $\psi_y = \operatorname{Re} V > 0$ в $G \cup \partial G$, кроме точек $z = A$, B (где $V = 0$).*

Доказательство. Гармоническая функция ψ достигает своего минимума на ∂G_+, где $\psi=0$. Следовательно, в силу принципа максимума, $\partial\psi/\partial\nu>0$ на ∂G_+, исключая точки $z=A, B$, где эта функция не определена. Поэтому $\psi_y(x, 0)>0$ для $(x, 0)\in\partial G_+$, $(x, 0)\neq A, B$, и так как $\psi=0$ на $\partial\mathcal{P}_+$, то $\psi_y>0$ на $\partial\mathcal{P}_+$, кроме точек A, B. Итак, $\psi_y\geqslant 0$ на ∂G_+ и гармонична в G_+, следовательно, $\psi_y>0$ в G_+. ∎

8. ОБТЕКАНИЕ ЗАДАННОГО ПРОФИЛЯ: РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Мы хотим записать задачу 7.1 в новых переменных и новых неизвестных функциях. Новые независимые переменные будут получены посредством преобразования годографа и, как легко догадаться, новая

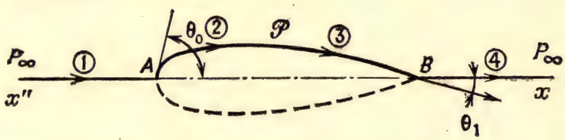

Рис. 5. Физическая плоскость.

неизвестная функция будет связана с соответствующим преобразованием Лежандра. Рассмотрим преобразование годографа $z\to V(z)$. Ниже приводится теорема, доказательство которой оставлено в качестве упражнения.

Теорема 8.1. (a) *Функция $q_1(x, 0)$ убывает от q_∞ до 0, когда x растет от $-\infty$ до A, и растет от 0 до q_∞, когда x растет от B до ∞.*

(b) *Множество $V(\partial\mathcal{P}_+)$ является простой замкнутой кривой. Если Σ_+ — открытая ограниченная компонента $\mathbb{R}^2\setminus V(\partial\mathcal{P}_+)$, то $(0, q_\infty]\subset\Sigma_+$ и преобразование годографа $z\to V(z)$ взаимно однозначно из G_+ на $\Sigma_+\setminus(0, q_\infty]$.*

Обратимся к рис. 5 и 6. Удобнее немного изменить преобразование годографа. Пусть $\theta_A\in\left(0, \frac{1}{2}\pi\right]\left(\theta_B\in\left[-\frac{1}{2}\pi, 0\right)\right)$ — угол между осью x и касательной к $\partial\mathcal{P}_+$ в точке A (B). Предполагая $\partial\mathcal{P}_+$ строго выпуклой и гладкой, получим, что для каждого $\theta\in(\theta_B, \theta_A)$ существует единственная точка $P\in\partial\mathcal{P}_+$, такая что касательная к $\partial\mathcal{P}_+$ в P образует угол θ с положительным направлением оси x. Обозначим координаты точки P через $(X(\theta), Y(\theta))$. Из предположения, что $\partial\mathcal{P}_+$ — кривая класса $C^{2,\lambda}$, следует включение $(X(\theta), Y(\theta))\in C^{1,\lambda}([\theta_B, \theta_A])$. Обозначим через $R(\theta)$ радиус кривизны кривой $\partial\mathcal{P}_+$ со знаком минус. В терминах θ величина $R(\theta)$ в точке $(X(\theta), Y(\theta))$ задается формулой

$$-R(\theta)=\sqrt{X'(\theta)^2+Y'(\theta)^2}<\infty. \tag{8.1}$$

Для $z \in \bar{G}_+$, $z \neq A$, B определим

$$\theta + i\sigma = W(z) = -i \log \overline{V(z)} = -\arg V(z) - i \log |V(z)|, \qquad (8.2)$$

причем ветвь логарифма выбрана так, чтобы $-\theta_A < \arg V(z) < -\theta_B$. Для точки $z = X(\theta) + iY(\theta) \in \partial\mathcal{F}_+$

$$V(z) = |V(z)| e^{-i\theta} \qquad (8.3)$$

в силу (iv); таким образом, $W(z) = \theta - i \log |V(z)|$, $z \in \partial\mathcal{F}_+$. Следо-

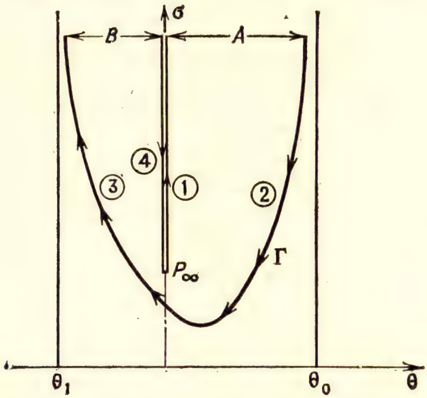

Рис. 6. Плоскость годографа.

вательно, кривая Г, определенная соотношением $\Gamma = W(\partial\mathcal{F}_+)$, допускает представление

$$\Gamma: \quad \sigma = l(\theta), \quad \theta_B < \theta < \theta_A, \qquad (8.4)$$

где $l(\theta) = -\log |V(X(\theta) + iY(\theta))|$. Отметим, что $l(\theta) \in C^{1,\lambda}(\theta_B, \theta_A)$ и $\lim\limits_{\theta \to \theta_B} l(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \theta_A} l(\theta) = +\infty$. Из теоремы 8.1 следует, что отображение $z \to W(z)$ взаимно однозначно из G_+ на открытую область $\mathcal{D}$, определенную соотношением

$$\mathcal{D} = \{\theta + i\sigma \mid \sigma > l(\theta),\ \theta_B < \theta < \theta_A\} \setminus \{i\sigma \mid \sigma \geqslant \sigma_\infty\},$$

где $\sigma_\infty = -\log q_\infty$.

Определим функцию тока в $\mathcal{D}$ в терминах наших новых переменных:

$$\tilde{\psi}(\theta, \sigma) = \psi(x, y), \quad \theta + i\sigma \in \mathcal{D}.$$

Так как ψ — гармоническая, а W — антиголоморфная функция, то $\tilde{\psi}$ — гармоническая функция в $\mathcal{D}$. Кроме того, $\tilde{\psi}(\theta, \sigma) = 0$ на Г, $\tilde{\psi}(0, \sigma) = 0$ при $\sigma > \sigma_\infty$ и $\tilde{\psi} \to 0$, если $\theta + i\sigma \to \infty$. В точке $i\sigma_\infty$ функция $\tilde{\psi}$ имеет, однако, особенность, и поэтому она не равна тождественно нулю. Для более глубокого понимания всего этого мы отсы-

лаем читателя к упр. 9, однако такой подход для нас не удобен. На самом деле можно вычислить $\tilde{\psi}_\sigma$ и $\tilde{\psi}_\theta$ на Г, так как очевидно, что пара $\tilde{\psi}$, Г является решением следующей задачи со свободной границей:

$$\Delta\tilde{\psi}=0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D},$$
$$\tilde{\psi}=0 \quad \text{на} \quad \partial\mathscr{D}\setminus\{i\sigma_\infty\},$$
$$\tilde{\psi}=0, \quad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\sigma}=\frac{R(\theta)\,e^{-\sigma}}{1+(dl/d\theta)^2} \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Хотя мы воздержимся также и от этого подхода, мы хотим подчеркнуть, что решение задачи со свободной границей дает с помощью (8.3) и (8.4) распределение скорости жидкости вдоль профиля $\partial\mathscr{P}_+$. А именно

$$l(\theta)=-\log|V(z)|=-\log|\mathbf{q}|, \quad \theta_B<\theta<\theta_A,$$

и поэтому $q_1=e^{-l(\theta)}\cos\theta$, а $q_2=e^{-l(\theta)}\sin\theta$. В этом состоит отличие от наших предыдущих задач с препятствиями и физических приложений, в которых свободная граница всегда являлась границей изменения в поведении решений. Здесь вместо этого она дает распределение скорости вдоль профиля.

Так же как в задаче фильтрации, мы предпочтем новое зависимое переменное, которое появляется как решение задачи Коши. Как ни парадоксально, но использование преобразования годографа искушает нас ввести преобразование Лежандра. Точнее, обсудим

Метод I. *Функция* $u(\theta, \sigma)$ *вводится как решение задачи*

$$\begin{aligned} &u_\sigma+u=\tilde{\psi} && \textit{в} \quad \mathscr{D}, \\ &u=u_\theta=u_\sigma=0 && \textit{на} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Метод II. *Функция* $u(\theta, \sigma)$ *вводится как модифицированное преобразование Лежандра от* ψ:

$$u(\theta, \sigma)=\psi(x, y)-x\psi_x(x, y)-y\psi_y(x, y)-\\ -e^{-\sigma}[X(\theta)\sin\theta-Y(\theta)\cos\theta]. \tag{8.6}$$

Теорема 8.2. *Существует единственное решение* $u(\theta, \sigma)$ *задачи Коши* (8.5), *и оно является преобразованием Лежандра* (8.6). *Кроме того,*

$$\left\{\begin{aligned} &-\Delta u=e^{-\sigma}R(\theta), && \textit{в} \quad \mathscr{D}, \quad (8.7)\\ &\quad u>0 && \quad (8.8)\end{aligned}\right.$$

где $R(\theta)$ — *величина* (8.1).

Следовательно, методы I, II эквивалентны. Предположим на минуту, что теорема доказана, и, выбрав произвольное $m<\min\limits_{\theta_B<\theta<\theta_A} l(\theta)$,

положим $\Omega=(\theta_B, \theta_A)\times(m, \infty)$. Продолжив u нулем для $\theta+i\sigma\in\Omega\setminus\overline{\mathscr{D}}$, получим, в силу (8.6), функцию из $C^1(\Omega\setminus\{i\sigma\mid\sigma\geqslant\sigma_\infty\})$, которая удовлетворяет соотношению

$$\int_\Omega [u_\theta(v-u)_\theta+u_\sigma(v-u)_\sigma]\,d\theta\,d\sigma\geqslant\int_\Omega e^{-\sigma}R(\theta)(v-u)\,d\theta\,d\sigma \qquad (8.9)$$

для $v\geqslant 0$ *в* Ω, *имеющих компактный носитель и равных нулю в окрестности* $\{i\sigma\mid\sigma\geqslant\sigma_\infty\}$.

Таким образом, наше новое u является подходящим кандидатом на решение вариационного неравенства. Обратимся теперь к доказательству теоремы 8.2.

Доказательство. Отметим прежде всего, что если $v(\theta, \sigma)$ — любое решение уравнения $v_\sigma+v=f$ в $\mathscr{D}$, то $(\partial/\partial\sigma)(e^\sigma v)=e^\sigma f$. Поэтому если $v=u(\theta, \sigma)$ и $f=\tilde{\psi}>0$, то при каждом θ функция $e^\sigma u(\theta, \sigma)$ строго возрастает как функция от σ. Так как $e^\sigma u(\theta, \sigma)=0$ на Γ, то $u(\theta, \sigma)>0$ в $\mathscr{D}$. С другой стороны, если v — это разность двух решений задачи (8.5), то $f=0$ и, значит, $e^\sigma v(\theta, \sigma)=\zeta(\theta)$ является функцией только θ и может быть вычислена на Γ, где $\zeta(\theta)=0$. Следовательно, решение задачи (8.5) единственно.

Покажем теперь, что это решение получается из (8.6). В силу определения θ, σ, данного в (8.2), $\psi_y+i\psi_x=e^{-\sigma}(\cos\theta-i\sin\theta)$, или $\psi_x=-e^{-\sigma}\sin\theta$ и $\psi_y=e^{-\sigma}\cos\theta$, $\theta+i\sigma\in\mathscr{D}$. Положим пока $u_0=\psi-x\psi_x-y\psi_y$. Тогда $du_0=-x\,d\psi_x-y\,d\psi_y$, или

$$du_0=e^{-\sigma}(x\cos\theta+y\sin\theta)\,d\theta+e^{-\sigma}(y\cos\theta-x\sin\theta)\,d\sigma. \qquad (8.10)$$

Пусть теперь $u=u_0-e^{-\sigma}(X(\theta)\sin\theta-Y(\theta)\cos\theta)$; тогда, вычисляя с помощью (8.10) $\partial u_0/\partial\sigma$, получим, что

$$u_\sigma+u=\tilde{\psi} \quad \text{в} \quad \mathscr{D}. \qquad (8.5)$$

Вспоминая, что $x=X(\theta)$ и $y=Y(\theta)$ на Γ, получим, что $u=0$ на Γ. Следовательно, $u_\sigma=0$ на Γ, так как $\tilde{\psi}=0$ на Γ и справедливо (8.5′)′. Наконец,

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=e^{-\sigma}[X(\theta)\cos\theta+Y(\theta)\sin\theta]-e^{-\sigma}[X(\theta)\cos\theta+Y(\theta)\sin\theta]-$$
$$-e^{-\sigma}[X'(\theta)\sin\theta-Y'(\theta)\cos\theta]=0 \quad \text{для} \quad \theta+i\sigma\in\Gamma,$$

так как равенство $\operatorname{tg}\theta=Y'(\theta)/X'(\theta)$ является определяющим свойством θ.

Функция $\psi-x\psi_x-y\psi_y$ является гармонической в G_+, а отображение $z\to\theta+i\sigma$ антиконформно, поэтому $\psi-x\psi_x-y\psi_y=u_0$ — гармоническая функция переменных θ и σ в $\mathscr{D}$. Следовательно,

$$\Delta u=-\Delta(e^{-\sigma}[X(\theta)\sin\theta-Y(\theta)\cos\theta])=-e^{-\sigma}R(\theta) \quad \text{в} \quad \mathscr{D},$$

если иметь в виду, что $X'(\theta)=R(\theta)\cos\theta$ и $Y'(\theta)=R(\theta)\sin\theta$. ▮

Чтобы завершить наш план, придадим точный смысл неравенству (8.9), определив условия, которым u удовлетворяет «на бесконечно-

сти» и на луче $\{i\sigma \mid \sigma \geqslant \sigma_\infty\}$, а также показав, что u обладает необходимыми свойствами интегрируемости.

Теорема 8.3. *Функция* $u(\theta, \sigma)$, *определенная соотношениями* (8.5) *или* (8.6), *непрерывна на* $\overline{\mathscr{D}}$, *если на луче* $\sigma \geqslant \sigma_\infty$ *ее доопределить следующим образом:* $u(0, \sigma) = He^{-\sigma}$, $\sigma \geqslant \sigma_\infty$, *где* $H = Y(0)$ — *высота профиля* $\partial\mathscr{P}_+$.

Доказательство. Отметим, что функция $\Phi(z)$ из (7.4) удовлетворяет соотношениям

$$\psi - x\psi_x - y\psi_y = \operatorname{Im}(\Phi(z) - z\Phi'(z)),$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= q_\infty z - \sum_1^\infty \frac{a_{n+1}}{nz^n}, \\ z\Phi'(z) &= q_\infty z + \sum_1^\infty \frac{a_{n+1}}{z^n}, \end{aligned}\right\} \quad |z| \text{ велик.}$$

Так как при $\theta + i\sigma \to i\sigma_\infty$ соответствующее $z \in G_+$ стремится к ∞, то

$$u(\theta, \sigma) = \operatorname{Im}(\Phi(z) - z\Phi'(z)) - e^{-\sigma}[X(\theta)\sin\theta - Y(\theta)\cos\theta] \to$$
$$\to Y(0)e^{-\sigma_\infty} = He^{-\sigma_\infty} \quad \text{при} \quad \theta + i\sigma \to i\sigma_\infty.$$

Рассмотрим теперь точку $i\sigma_1$ с $\sigma_1 > \sigma_\infty$. Она имеет два прообраза в ∂G_+, $(x_1, 0)$ с $x_1 > 0$ и $(x_2, 0)$ с $x_2 < 0$. В каждом случае, когда $\theta + i\sigma$ находится в окрестности $i\sigma_1$, соответствующая точка (x, y) находится в окрестности $(x_1, 0)$ или $(x_2, 0)$, поэтому, в силу (8.6), $u(\theta, \sigma) \to \to He^{-\sigma_1}$, если учесть, что $\psi_x = -e^{-\sigma}\sin\theta$. ∎

Следствие 8.4. *Пусть* u — *функция, определенная в* (8.5) *или* (8.6), *а* $H = Y(0)$ — *высота профиля* $\mathscr{P}$. *Тогда*

$$0 \leqslant u(\theta, \sigma) \leqslant He^{-\sigma} \quad \text{для} \quad \theta + i\sigma \in \Omega \tag{8.11}$$

и, в частности, $u \in L^2(\Omega)$.

Доказательство. Мы должны показать, что в $\mathscr{D}$ выполняются неравенства (8.11). Положим $v(\theta, \sigma) = He^{-\sigma}\cos\theta$. Эта функция гармоническая и положительная в Ω, так как $-\pi/2 \leqslant \theta_B < \theta_A \leqslant \pi/2$. Таким образом, $-\Delta(u - v) = -\Delta u = e^{-\sigma}R(\theta) \leqslant 0$ в $\mathscr{D}$ и, следовательно, согласно принципу максимума, $\sup\limits_{\mathscr{D}}(u - v) \leqslant \sup\limits_{\partial\mathscr{D}}(u - v)$, если известно, что u ограничена. Оставляя проверку этого на конец доказательства, заметим, что $u - v = 0$ на $i\sigma$, $\sigma \geqslant \sigma_\infty$, и $u - v = -v \leqslant 0$ на Г. Следовательно, (8.11) имеет место, если только мы проверим, что u ограничена.

В силу непрерывности u, установленной в теореме 8.3, $0 \leqslant u(\theta, \sigma) \leqslant k$ для $\theta + i\sigma \in \mathscr{D}$, $\sigma \leqslant 2\sigma_\infty$. Далее, для некоторого $M > 0$ имеем $\hat{\psi}(\theta, \sigma) \leqslant M$ при $\theta + i\sigma \in \mathscr{D}$, $\sigma \geqslant 2\sigma_\infty$, так как точки $\theta + i\sigma$ с $\sigma \geqslant 2\sigma_\infty$ соответствуют точкам z с ограниченным $|z|$. В силу (8.5), $\frac{\partial}{\partial\sigma}(e^\sigma u) =$

$=e^{\sigma}\tilde{\psi}$ в $\mathscr{D}$, и поэтому

$$0 \leqslant u(\theta, \sigma) \leqslant M(1 - e^{2\sigma_\infty - \sigma}) \text{ в } \mathscr{D}, \quad \sigma \geqslant 2\sigma_\infty. \blacksquare$$

Лемма 8.5. *Пусть u — функция, определенная в* (8.5) *или* (8.6). *Тогда* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Нам нужно только проверить, что $\operatorname{grad} u \in L^2(\Omega)$. Возьмем для этого любую функцию $v \in C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} &v(0, \sigma) = He^{-\sigma} \quad \text{для} \quad \sigma \geqslant \sigma_\infty, \\ &|v(\theta, \sigma)| \leqslant 2He^{-\sigma} \quad \text{в} \quad \mathscr{D}, \\ &\Delta v \in L^\infty(\Omega) \\ &\text{и} \quad \operatorname{supp} v \subset \mathscr{D} \cup \{i\sigma \mid \sigma \geqslant \sigma_\infty\}; \end{aligned}$$

это последнее условие введено для удобства. Пусть $\xi_0(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R})$, причем $0 \leqslant \xi_0 \leqslant 1$ и

$$\xi_0(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \leqslant 0, \\ 0, & \sigma \geqslant 1, \end{cases}$$

и положим $\xi_n(\sigma) = \xi_0(\sigma - n)$. Пусть, кроме того, $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1$ и

$$\eta_0(\theta, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\theta| + |\sigma| > 1, \\ 0 & \text{при} \quad |\theta| + |\sigma| < 1/2, \end{cases}$$

и положим $\eta_n(\theta, \sigma) = \eta_0(n\theta, n(\sigma - \sigma_\infty))$. Наконец, положим $\zeta_n(\theta, \sigma) = \xi_n(\sigma)\eta_n(\theta, \sigma)$.

После интегрирования по частям получим

$$\int_\Omega |\operatorname{grad}(u - v)|^2 \zeta_n \, d\theta \, d\sigma = \int_{\mathscr{D}} |\operatorname{grad}(u - v)|^2 \zeta_n \, d\theta \, d\sigma =$$
$$= -\int_{\mathscr{D}} \Delta(u - v)(u - v)\zeta_n \, d\theta \, d\sigma - \int_{\mathscr{D}} (u - v) \operatorname{grad}(u - v) \operatorname{grad} \zeta_n \, d\theta \, d\sigma.$$

Далее,

$$\int_{\mathscr{D}} (u - v) \operatorname{grad}(u - v) \operatorname{grad} \zeta_n \, d\theta \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{D}} \operatorname{grad}(u - v)^2 \operatorname{grad} \zeta_n \, d\theta \, d\sigma =$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathscr{D}} (u - v)^2 \Delta\zeta_n \, d\theta \, d\sigma.$$

В силу этих двух соотношений,

$$\int_\Omega |\operatorname{grad}(u - v)|^2 \zeta_n \, d\theta \, d\sigma =$$
$$= -\int_{\mathscr{D}} (u - v)\Delta(u - v)\zeta_n \, d\theta \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\mathscr{D}} (u - v)^2 \Delta\zeta_n \, d\theta \, d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant \|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Delta(u - v)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{2} \|u - v\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\mathscr{D}} |\Delta\zeta_n| \, d\theta \, d\sigma.$$

Вследствие (8.11) правая часть неравенства конечна.

При этом $\int\limits_{\mathscr{D}} \Delta\zeta_n \, d\theta \, d\sigma$ остается ограниченным при $n \to \infty$. Действительно, для достаточно больших n носители $\operatorname{grad} \xi_n$ и $\operatorname{grad} \eta_n$ не пересекаются. Поэтому $\Delta\zeta_n = n^2 \Delta\eta_0 (n\theta, n(\sigma - \sigma_\infty)) + \xi_0''(\sigma - n)$, откуда следует оценка

$$\int\limits_{\mathscr{D}} |\Delta\zeta_n| \, d\theta \, d\sigma \leqslant n^2 \int\limits_{1/(2n) < |\theta| + |\sigma - \sigma_\infty| < 1/n} |\Delta\eta_0 (n\theta, n(\sigma - \sigma_\infty))| \, d\theta \, d\sigma + \\ + \int\limits_{n < \sigma < n+1} |\xi_0''(\sigma - n)| \, d\theta \, d\sigma \leqslant \\ \leqslant \pi \|\Delta\eta_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \pi \|\xi_0''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad \blacksquare$$

Теперь мы подошли к заключительной части нашего исследования. Положим

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant 0 \text{ в } \Omega \text{ и } v(0, \sigma) = He^{-\sigma} \text{ при } \sigma \geqslant \sigma_\infty\}. \tag{8.12}$$

В силу непрерывности следа (см. приложение А к гл. II), K является замкнутым выпуклым подмножеством пространства $H_0^1(\Omega)$.

Теорема 8.6. *Функция* u, *определенная в* (8.5) *или* (8.6), *удовлетворяет неравенству*

$$u \in K: \quad \int\limits_{\Omega} [u_\theta (v - u)_\theta + u_\sigma (v - u)_\sigma] \, d\theta \, d\sigma \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (v - u) \, d\theta \, d\sigma \quad \forall v \in K. \tag{8.13}$$

Доказательство. Вследствие теоремы 8.2 и леммы 8.5 мы знаем, что $u \in K$. Достаточно показать, что (8.13) выполнено для $v \in K \cap \cap L^\infty(\Omega)$; общий случай получается с помощью срезки. Для любого $v \in K \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma = \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma = \\ = -\int\limits_{\mathscr{D}} \Delta u (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma - \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \zeta_n (v - u) \, d\theta \, d\sigma = \\ = \int\limits_{\mathscr{D}} R(\theta) e^{-\sigma} (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma - \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \zeta_n (v - u) \, d\theta \, d\sigma.$$

Далее, $\int\limits_{\mathscr{D}} R(\theta) e^{-\sigma} (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma \geqslant \int\limits_{\Omega} R(\theta) e^{-\sigma} (v - u) \zeta_n \, d\theta \, d\sigma$, так как $R(\theta) < 0$, $u = 0$ на $\Omega \setminus \mathscr{D}$ и $v \geqslant 0$ в Ω.

Таким образом, для доказательства (8.13) достаточно показать, что

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \zeta_n (v - u) \, d\theta \, d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{8.14}$$

Для достаточно больших n имеем $\operatorname{grad}\zeta_n = \operatorname{grad}\xi_n + \operatorname{grad}\eta_n$. Рассмотрим сначала вклад от ξ_n:

$$\left|\int_{\mathcal{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \xi_n (v-u)\, d\theta\, d\sigma\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathcal{D}\cap\{\theta+i\sigma \mid n\leqslant\sigma\leqslant n+1\}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \xi_n (v-u)\, d\theta\, d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi}\, \|v-u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\xi_0'\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_{n\leqslant\sigma\leqslant n+1} |\operatorname{grad} u|^2 d\theta\, d\sigma\right)^{1/2} \to 0$$

при $n\to\infty$, так как $|\operatorname{grad} u| \in L^2(\Omega)$.

Далее, для η_n имеем

$$\left|\int_{\mathcal{D}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \eta_n (v-u)\, d\theta\, d\sigma\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathcal{D}\cap\{\theta+i\sigma \mid |\theta|+|\sigma-\sigma_\infty|<1/n\}} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \eta_n (v-u)\, d\theta\, d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\, \|v-u\|_{L^\infty(\Omega)}\, n\, \|\operatorname{grad}\eta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{n}\left(\int_{|\theta|+|\sigma-\sigma_\infty|<1/n} |\operatorname{grad} u|^2 d\theta\, d\sigma\right)^{1/2} \to$$

$$\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

опять из-за того, что $|\operatorname{grad} u| \in L^2(\Omega)$. Это доказывает (8.14) и завершает доказательство теоремы. ∎

В соответствии с нашей обычной линией мы теперь можем рассмотреть вариационное неравенство (8.13), которое может быть сформулировано, если известны параметры Ω, σ_∞, H и $R(\theta)$. Из них H и $R(\theta)$ являются функциями профиля $\mathcal{P}$, а $\sigma_\infty = -\log q_\infty$ задано. Множество $\Omega = (\theta_B, \theta_A)\times(m, \infty)$ зависит от $\mathcal{P}$ через θ_A и θ_B и от $m \leqslant \min l(\theta)$. Напомним, что

$$l(\theta) = -\log|\mathbf{q}| \geqslant -\log\left(\max_{\partial\mathcal{P}_+}|\mathbf{q}|\right) > -\infty, \tag{8.15}$$

потому что скорость жидкости ограничена в G и, в частности, вдоль профиля $\partial\mathcal{P}$. Аккуратная оценка для m может оказаться полезной при вычислении решения.

Вариационное неравенство (8.13) можно разрешить и получить искомое решение задачи 7.1. Для этого достаточно заметить, что форма Дирихле $a(u, v) = \int_\Omega [u_\theta v_\theta + u_\sigma v_\sigma]\, d\theta\, d\sigma$ коэрцитивна на $H_0^1(\Omega)$.

В заключение отметим, что оценка для $\max|\mathbf{q}|$, встречающегося в (8.15), может быть найдена a priori.

Теорема 8.7. *Пусть* $r = \max_{\theta_B\leqslant\theta\leqslant\theta_A} |R(\theta)| > 0$. *Тогда* $\max_{\partial\mathcal{P}_+}|\mathbf{q}| \leqslant q_\infty e^{-\sigma_0}$, *где* $\sigma_0 < 0$ — *единственное решение уравнения* $(1+\sigma)e^{-\sigma} = 1-(H/r)$.

Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю.

9. ИЗГИБАНИЕ СВОБОДНО ОПИРАЮЩЕЙСЯ БАЛКИ

С малыми изгибаниями жесткой балки, лежащей на заданном препятствии, связано вариационное неравенство высшего порядка. Мы исследуем эту задачу, ограничиваясь случаем одномерной балки. Задано α, $0<\alpha<\infty$, положим $\Omega=(-\alpha, \alpha)\in\mathbb{R}^1$, и пусть ψ — гладкая функция на $\bar{\Omega}$, причем

$$\max_{\Omega}\psi>0 \quad \text{и} \quad \psi<0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{9.1}$$

Пусть $V=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, и положим

$$K=\{v\in V \mid v\geqslant\psi \quad \text{в} \quad \Omega\}. \tag{9.2}$$

Очевидно, K — выпуклое замкнутое подмножество V.

Определим билинейную форму

$$a(v, w)=\int_{\Omega} v''(t)\,w''(t)\,dt, \quad v, w\in V. \tag{9.3}$$

Легко проверить, что $a(v, w)$ коэрцитивна на V. Норма на V задается выражением $\|v'\|_{L^2(\Omega)}+\|v''\|_{L^2(\Omega)}$, поэтому для проверки коэрцитивности достаточно доказать неравенство

$$\|v'\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|v''\|_{L^2(\Omega)}, \quad v\in V,$$

с некоторым $C>0$. Действительно, если $v\in V$, то $v\in C^1(\bar{\Omega})$ и $v(\alpha)=v(-\alpha)=0$. Пусть $y\in\Omega$ — точка, в которой $v'(y)=0$. Тогда

$$v'(x)^2=\int_y^x \frac{d}{dt}v'(t)^2\,dt=2\int_y^x v'(t)\,v''(t)\,dt\leqslant 2\int_{-\alpha}^{\alpha}|v'(t)|\,|v''(t)|\,dt.$$

Интегрируя по Ω и применяя неравенство Шварца, получим, что

$$\|v'\|_{L^2(\Omega)}\leqslant 4\alpha\|v''\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9.4}$$

Мы хотим изучить следующую задачу.

Задача 9.1. *Дано* $f\in V'$, *найти*

$$u\in K:\quad a(u, v-u)\geqslant\langle f, v-u\rangle \quad \forall v\in K.$$

Теорема 9.2. *Существует единственное решение задачи* 9.1.

Доказательство состоит в непосредственном применении теоремы 2.1 гл. II. Заметим, что $u\in C^{1,1/2}(\bar{\Omega})$, так как $\Omega\subset\mathbb{R}^1$. Изучим некоторые свойства решения. Для $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$, $\zeta\geqslant0$, функция $u+\zeta\in K$, поэтому отображение $\zeta\to a(u, \zeta)-\langle f, \zeta\rangle$ является неотрицательной обобщенной функцией. В силу теоремы Шварца, существует такая мера $\mu\geqslant0$, что

$$a(u, \zeta)=\langle f, \zeta\rangle+\int_{\Omega}\zeta(t)\,d\mu(t), \quad \zeta\in C_0^\infty(\Omega), \tag{9.5}$$

и, кроме того, $\operatorname{supp}\mu\subset\{t \mid u(t)=\psi(t)\}$.

Из этого представления мы выведем некоторые свойства гладкости u. Например, справедлива

Теорема 9.3. *Пусть u — решение задачи* 9.1 *с* $f=0$. *Тогда* $(d^3/dt^3)u$ — *функция ограниченной вариации и* $(d^2/dt^2)u$ *непрерывна в* Ω.

Для доказательства отметим, что, в силу (9.5), обобщенная функция $(d^4/dt^4)u=d\mu$, где $\mu\geqslant 0$. Следовательно, можно найти такую растущую функцию $m(t)$, что $(d^3/dt^3)u=m(t)=\mu((0,\ t))+c$. Утверждение доказано. Въедливый читатель заметит, что функция u'' липшицева в Ω.

Обратим теперь наше внимание на способ получения свойств гладкости посредством штрафа. При построении соответствующих аппроксимаций будет использовано само u. Определим $u_\varepsilon(t)$ как решение задачи второго порядка

$$u_\varepsilon-\varepsilon u_\varepsilon''=u \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u_\varepsilon(\alpha)=u_\varepsilon(-\alpha)=0, \tag{9.6}$$

где u — решение задачи 9.1.

Лемма 9.4. *Пусть u_ε — решение задачи* (9.6). *Тогда* $u_\varepsilon\in K\cap H^4(\Omega)$ *и* $u_\varepsilon''(\alpha)=u_\varepsilon''(-\alpha)=0$.

Доказательство. Так как $u\in H^2(\Omega)$, то $u_\varepsilon\in H^4(\Omega)$. В частности, $u_\varepsilon\in C^3(\Omega)$. В точке $x\in\Omega$, где $u_\varepsilon(x)=\min u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon''(x)\geqslant 0$, поэтому

$$u_\varepsilon(x)-\psi(x)=u(x)-\psi(x)+\varepsilon u_\varepsilon''(x)\geqslant u(x)-\psi(x)\geqslant 0.$$

Следовательно, $u_\varepsilon\in K$. ∎

Лемма 9.5. *Предположим, что* $f\in H^{-1}(\Omega)$ *и функция* u_ε *определена с помощью* (9.6). *Тогда существует такая константа* $C>0$, *что* $\|u_\varepsilon\|_{H^3(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ *для* $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Доказательство. Запишем f в виде $f=f_0-(d/dt)f_1$, $f_0, f_1\in L^2(\Omega)$. Тогда

$$a(u,\ v-u)\geqslant\langle f,\ v-u\rangle=\int_\Omega[f_0(v-u)+f_1(v-u)']\,dt$$

или, в силу леммы Минти (лемма 1.5 гл. III),

$$a(v,\ v-u)\geqslant\int_\Omega[f_0(v-u)+f_1(v-u)']\,dt \qquad \forall v\in K.$$

Выбрав $v=u_\varepsilon$, получим $v-u=\varepsilon u_\varepsilon''$, и поэтому

$$a(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon'')\geqslant\int_\Omega[f_0u_\varepsilon''+f_1u_\varepsilon''']\,dt.$$

Так как $u_\varepsilon''(\alpha)=u_\varepsilon''(-\alpha)=0$, то, интегрируя по частям в первом члене, получим, что $a(u_\varepsilon,\ u_\varepsilon'')=-\int_\Omega(u_\varepsilon''')^2\,dt$. Поэтому

$$\|u_\varepsilon'''\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\|f_0\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon''\|_{L^2(\Omega)}+\|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon'''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ввиду того что $u_\varepsilon'' \in H_0^1(\Omega)$, можно воспользоваться леммой Пуанкаре, и, следовательно, $\|u_\varepsilon''\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 4\alpha \|u_\varepsilon'''\|_{L^2(\Omega)}$. Поэтому

$$\|u_\varepsilon'''\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 4\alpha \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как $u_\varepsilon \in V$. ∎

В рассматриваемом одномерном случае приведенная ниже теорема имеет, по существу, то же содержание, что и теорема 9.3. Однако метод доказательства (леммы 9.4 и 9.5) может быть использован также и в высших размерностях.

Теорема 9.6. *Пусть u — решение задачи* 9.1 *с* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Тогда* $u \in H^3(\Omega) \cap C^{2,1/2}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Нужно только показать, что $u_\varepsilon \to u$ в некотором смысле. Действительно, в силу предыдущей леммы, $\|u_\varepsilon''\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C < \infty$ для $0 < \varepsilon \leqslant 1$, поэтому ввиду (9.6)

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u_\varepsilon''\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon C \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{9.7}$$

Существует подпоследовательность, сходящаяся слабо в $H^3(\Omega)$ к некоторой функции, которая вследствие (9.7) должна совпадать с u. Поэтому $u \in H^3(\Omega)$. ∎

Комментарии и библиографические указания

Проблема гидродинамической смазки обсуждалась О. Рейнольдсом в 1886 г. и А. Зоммерфельдом в 1904 г. Ее формулировка в виде вариационного неравенства предложена Чиматти [1].

Асимптотика из теоремы 2.5 также появилась в этой работе, а аналогичные разложения на асимптотические ряды установлены Каприцем и Чиматти [1].

По задаче фильтрации имеется обширная литература, появившаяся как до, так и после возникновения вариационных неравенств. Интересная идея решения задачи фильтрации предложена Ренато Каччиополи (см. статью К. Миранды [1]). Преобразование (3.7) ввел Байокки [1]. Это стимулировало большое количество исследований по данному предмету. Мы отсылаем читателя к работам Байокки [2, 4]. По поводу обобщений и дополнительной литературы имеется недавняя книга Байокки и Капело [1]. Существование интервала фильтрации $(h, \varphi(a))$ с $\varphi(a) > h$ показано Фридманом и Йенсеном [1].

Многомерная задача из § 5 и 6 была сформулирована в работе Стампаккья [6]. Анализ свободной границы в этом случае проведен Кафарелли [1]. Доказательство теоремы 6.7 является модификацией соответствующего доказательства из работы Альта [2].

Имеются другие методы исследования задачи фильтрации. Мы отсылаем читателя к работам Альта [1] и Брезиса, Киндерлерера и Стампаккья [1].

Общую библиографию о потоках жидкости можно найти в книге Берса [1]. Здесь мы следуем работе Брезиса и Стампаккья [2]. См. также работу Стампаккья [8]. Хотя настоящий метод использует симметричность потока, он применим также к сжимаемой жидкости (Брезис и Стампаккья [3]), к кавитации (Брезис и Дюво [1]) и к потоку в канале (Томарелли [1]). (См. упражнения.)

Мы только чуть-чуть коснулись теории вариационных неравенств высокого порядка. В качестве примеров работ в этой обширной области упомянем работы Вилладжо [1, 2], Фрезе [2], Кафарелли и Фридмана [1], Брезиса и Стампаккья [4] и Стампаккья [7].

8 Заказ 864

Среди приложений, не рассмотренных в книге из-за недостатка места, отметим задачу упругопластического кручения. Здесь выпуклое множество допустимых функций имеет вид $K=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid |v_x| \leqslant 1$ п. в. в $\Omega\}$. Читатель может обратиться к работам Брезиса [2], Брезиса и Стампаккья [1], Кафарелли и Ривьере [4] и Тинга [1]. Мы кратко коснулись задачи об удержании (ограниченных конфигурациях) плазмы и ее формулировки в виде вариационной задачи (см. гл. VI, § 4 упр. 15). В дополнение к сделанным там ссылкам сошлемся на работу Берестыцкого и Брезиса [1]. Имеются вопросы в теории стационарного вихревого потока, которые приводят к аналогичным рассмотрениям; см. Френкель и Бергер [1].

Упражнения

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область и $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ — препятствие, скажем $\max\limits_{\Omega} \psi > 0$ и $\psi < 0$ на $\partial\Omega$. Пусть $K=\{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geqslant \psi$ в $\Omega\}$. Рассмотрим вариационное неравенство

$$u \in K\colon \int\limits_{\Omega} u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(v-u)\,dx \quad \forall v \in K,$$

где $f \in L^\infty(\Omega)$ — заданная функция. Покажите, что эта задача не обязательно эквивалентна следующей задаче со свободной границей: найти замкнутое подмножество $I \subset \Omega$, такое что $-\Delta u = f$ в $\Omega \setminus I$, $u=\psi$ в I и $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Рассмотрите одномерный случай. Когда эти две задачи эквивалентны? Как связана эта задача с задачей о смазке подшипника, рассмотренной в § 2?

2. Докажите теорему 2.5. [*Указание*. Сначала возьмите $v=0$ в (2.8), чтобы доказать, что $\|\operatorname{grad} p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon$. Затем умножьте (2.13) на ε^2, положите $v=p_\varepsilon/\varepsilon \in K$ и прибавьте результат к (2.8) с $v=\varepsilon p_0$, $p=p_\varepsilon$.]

3. Для решения задачи 2.1 покажите, что

$$\frac{\partial}{\partial z} p(\theta, z) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z < b, \qquad \frac{\partial}{\partial z} p(\theta, z) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -b < z \leqslant 0,$$

[*Указание*: $(\partial/\partial z)\, p$ подчиняется принципу максимума в $\Omega \setminus I$.]

4. Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$ — область, $\xi \in S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ и, наконец, f — гладкая функция на $\bar{M}$. Рассмотрите задачу: найти пару (Ω, u), $\Omega \subset M$ и $u \in C(\bar{\Omega})$, такую что

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \xi \cdot \nu \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cap M.$$

Введите новую неизвестную функцию и запишите задачу в виде «почти вариационного неравенства», что означает, что граничные условия элементов K остаются неопределенными. При каких дополнительных предположениях относительно u на $\partial M \cap \partial\Omega$ эта задача может быть переписана как вариационное неравенство? Чтобы начать исследование, запишите задачу в слабой форме.

5. Пусть w — решение вариационного неравенства (3.14), и предположим, что $\varphi(a) > h$. Покажите, что $w \notin H^{2,\infty}(R)$.

6. Рассмотрите задачу 3.1 для плотины переменной пористости Более того, предположите, что пьезометрический напор $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(k(x, y)\,u_x(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y)\,u_y(x, y)) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным условиям задачи 3.1, где $k(x, y) = e^{f(x)+g(y)} > 0$ в R и $g'(y) \geqslant 0$ при $h \leqslant y \leqslant H$.

Введите новую неизвестную функцию $w(x, y)$ как решение задачи Коши

$$w_y = -e^{g(y)}(u-y) \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

(Бенчи [1]).

7. Докажите лемму 6.2.
8. Докажите лемму 6.3.
9. (Пример из гидромеханики.) Предположим, что профиль в задаче 7.1 задается формулой $\mathscr{P}=\{z \mid |z| \leqslant 1\}$ и $q_\infty=1$. Тогда конформное отображение f из теоремы 7.2 сводится к $f(z)=z$. Вычислите $\Phi(z)$, $\psi(z)$, $V(z)$ и решение $u(\theta, \sigma)$ вариационного неравенства. В частности, исследуйте особенность $\tilde{\psi}(\theta, \sigma)$ в точке $\theta+i\sigma=i\sigma_\infty=0$.

10. Предположим, что профилем в задаче 7.1 является эллипс $\mathscr{P}=\left\{z \left| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right.\right\}$ и $q_\infty=1$. Найдите решение задачи 7.1 в явном виде.
11. Исследуйте стационарный поток сжимаемой жидкости около симметричного выпуклого профиля. В этом случае имеется заданная функция плотности $\rho(x, y)$, такая что (ii′) $\operatorname{div}(\rho \mathbf{q})=0$, (iii′) $\operatorname{rot} \mathbf{q}=0$ в G и выполнены также условия (i), (iv)—(vi) задачи 7.1. Предполагается, что $\rho=h(|\mathbf{q}|)$. Имеются потенциал скорости φ и функция тока ψ, удовлетворяющие соотношениям $\mathbf{q}=\operatorname{grad}\varphi$, $\rho q_1=\psi_y$ и $\rho q_2=-\psi_x$ (Брезис и Стампаккья [3] и Стампаккья [8]).
12. Предположим в задаче 7.1, что жидкость обтекает тот же выпуклый профиль, расположенный в середине канала. Найдите вариационное неравенство для этой задачи (Т. Томарелли [1]).
13. Изучите возможность кавитации в задаче 7.1 (Брезис и Дюво [1]).
14. (Деталь доказательства теоремы 7.2.) Пусть L: $z=x(s)+iy(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, — замкнутая дуга класса $C^{1,\lambda}$ с некоторым $\lambda>0$ во втором квадранте плоскости $z=x+iy$ с $z(0)=0$, и для малого $\varepsilon>0$ положим

$$U=\{z \mid y>y(s), \text{ если } x \leqslant 0, \text{ и } y>0, \text{ если } x \geqslant 0\} \cap \{z \mid |z|<\varepsilon\}.$$

Предположим, что $\psi \in C(\bar{U})$, причем

$$\Delta\psi=0 \quad \text{в} \quad U,$$

$$\psi=0 \quad \text{для} \quad z \in L \quad \text{и для} \quad 0 \leqslant z \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для некоторого $\mu>0$ имеем $\psi \in C^{1,\mu}(U \cap \{z \mid |z|<\delta\})$ для любого $\delta<\varepsilon$. [*Указание*. Предположив, что касательная к L в точке $z=0$ образует с положительным направлением оси x угол α, $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, рассмотрите отображение $z \to z^{\pi/\alpha}$ (Брезис и Стампаккья [2]).]
15. Докажите теорему 8.1. [*Указание*. Используйте принцип аргумента, т. е. индекс отображения $z \to V(z)$ (Брезис и Стампаккья [2]).]
16. Докажите теорему 8.7. [*Указание*. Положите

$$h(\sigma)=\begin{cases} re^{-\sigma}+re^{-\sigma_\infty-\sigma_0}(\sigma-\sigma_\infty)+He^{-\sigma_\infty}-re^{-\sigma_\infty}, & \sigma \geqslant \sigma_\infty+\sigma_0, \\ 0, & \sigma<\sigma_\infty+\sigma_0, \end{cases}$$

и докажите, что решение $u(\theta, \sigma)$ вариационного неравенства удовлетворяет условию $u \leqslant h$. Следовательно, $u=0$ при $\sigma<\sigma_\infty+\sigma_0$, поэтому $l(\theta) \geqslant \sigma_\infty+\sigma_0$, $\theta_B<\theta<\theta_A$.]
17. Решите задачу 9.1 для $V=\{v \in H^2(\Omega) \mid v=v'=0 \text{ на } \partial\Omega\}$.
18. Рассмотрите задачу 9.1 для размерности $N>1$. Покажите, что решение u существует и что $u \in H^3(\Omega)$.
19. Предположим, что в задаче 9.1 $K=\{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid |v''(t)| \leqslant \beta\}$. Покажите, что решение существует и, более того, принадлежит $H^{4,s}(\Omega)$.
20. Опишите двойственное пространство V' к пространству из задачи 9.1 и к вариантам этого пространства, приведенным выше.
21. Пусть $N>1$. Проведите формальный анализ задачи со свободной границей, соответствующей задаче 9.1, в духе гл. VI. Хотя уравнения имеют высший порядок, они могут быть записаны в виде системы уравнений второго порядка, когда $a(u, v)=\int\limits_\Omega \Delta u \, \Delta v \, dx$.
22. Пусть Γ: $y=\varphi(x)$, $0<x<a$, — свободная граница в задаче 3.1. Проверьте, что $\varphi(x)$ — аналитическая функция от x (сошлитесь на теорему 6.7).

Глава VIII

ОДНОФАЗОВАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

1. ВВЕДЕНИЕ

Однофазовая задача Стефана описывает таяние куска льда (нулевой температуры), находящегося в области, заполненной водой. В общей задаче Стефана исследуются процессы изменения фазы в теплопроводящей среде, когда энергия, т. е. тепло, поглощается системой. Неизвестными при этом являются: (i) распределение температуры воды как функция пространства и времени и (ii) свободная граница соприкосновения воды и льда. Чтобы найти распределение температуры, необходимо решить уравнение теплопроводности в области, заполненной водой; поверхность соприкосновения определяется с помощью закона сохранения энергии. Мы ограничимся случаем одной пространственной переменной. Это даст возможность узнать многие характерные особенности проблемы, избежав многих технических сложностей. В наибольшей степени это относится к нашим исследованиям свободной границы с помощью преобразования Лежандра. Пусть $T>0$ и $s_0>0$ заданы. Рассмотрим классическую задачу Стефана.

Задача 1.1. *Найти функцию* $\Theta(x, t)$ *и кривую* Γ: $t=s(x)$, $x>s_0$, *удовлетворяющие условиям*

$$-\Theta_{xx}+\Theta_t=0 \quad \text{в} \quad \{(x, t) \mid s(x)<t<T\},$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Theta=0 \\ \Theta_x s'(x)=-k\end{array}\right. \quad \text{для} \quad (x, t)\in\Gamma,$$

$$\Theta(x, 0)=h(x) \quad \text{для} \quad 0<x<s_0,$$

$$\Theta(0, t)=g(t) \quad \text{для} \quad 0<t<T,$$

где $h(x)>0$ — *начальная температура,* $g(t)\geqslant 0$ — *тепло, полученное в момент времени* t, *и* $k>0$ — *удельная теплота плавления льда.*

Функция $\Theta(x, t)$ интерпретируется как температура воды в точке x в момент времени t, а кривая Γ задает поверхность раздела льда и воды. В момент времени t вода занимает подмножество $\{x \mid s(x)<t\}$, причем предполагается, что $s(x)=0$ при $x\leqslant s_0$. Отметим, что $\Theta(x, t)=\min\Theta=0$ для $(x, t)\in\Gamma$, и поэтому $\Theta_x\leqslant 0$ на Γ. Следовательно,

$$s'(x)\geqslant 0, \tag{1.1}$$

и, значит, *кривая* Γ *монотонна*. Именно это свойство однофазовой задачи позволяет без труда свести ее к вариационному неравенству.

Покажем, как это сделать. Пусть $R > s_0 > 0$. В дальнейшем мы будем считать R зависящим от начального значения, k и т. д. Положим $D = (0, R) \times (0, T)$. Вариационное неравенство будет получено для функции $u(x, t)$, определяемой соотношениями

$$
\begin{aligned}
&u(x, t) = \int_{s(x)}^{t} \Theta(x, \tau)\, d\tau, && s(x) \leqslant t \leqslant T, && s_0 \leqslant x \leqslant R,\\
&u(x, t) = 0, && 0 \leqslant t \leqslant s(x), && s_0 \leqslant x \leqslant R, \qquad (1.2)\\
&u(x, t) = \int_{0}^{t} \Theta(x, \tau)\, d\tau, && 0 \leqslant t \leqslant T, && 0 \leqslant x \leqslant s_0.
\end{aligned}
$$

Выведем дифференциальное уравнение для u, предполагая, что Θ и s — гладкие функции:

$$
\begin{aligned}
u_x(x, t) &= \int_{s(x)}^{t} \Theta_x(x, \tau)\, d\tau - s'(x)\, \Theta(x, s(x)) = \\
&= \int_{s(x)}^{t} \Theta_x(x, \tau)\, d\tau, \quad s(x) < t < T, \quad s_0 < x < R.
\end{aligned}
$$

Точно так же

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x, t) &= \int_{s(x)}^{t} \Theta_{xx}(x, \tau)\, d\tau - s'(x)\, \Theta_x(x, s(x)) = \int_{s(x)}^{t} \Theta_t(x, \tau)\, d\tau + k = \\
&= \Theta(x, t) + k = u_t(x, t) + k, \quad s(x) < t < T, \quad s_0 < x < R.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$
u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) - h(x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < s_0.
$$

Положим поэтому

$$
f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leqslant x < s_0, \\ -k, & s_0 \leqslant x \leqslant R, \end{cases} \qquad (1.3)
$$

$$
\psi(t) = \int_{0}^{t} g(\tau)\, d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (1.4)
$$

где, напомним, $k > 0$, а g и h — гладкие положительные функции соответственно на $[0, T]$ и на $[0, s_0)$. Обозначив через K множество неотрицательных функций из $L^2(D)$, условия на u можно переписать в форме альтернативы:

$$
(-u_{xx} + u_t)(v - u) - f(v - u) = 0, \quad u > 0 \text{ для } v \in K
$$

или

$$
(-u_{xx} + u_t)(v - u) - f(v - u) = kv \geqslant 0, \quad u = 0 \text{ для } v \in K.
$$

Такая запись условий при заданном $T > 0$ приводит к следующему вариационному неравенству.

Задача 1.2. *Найти функцию* $u \in L^2(0, T; H^2(0, R)) \cap K$, *такую что* $u_t \in K$,

$$(-u_{xx} + u_t)(v - u) \geq f(v - u) \quad \textit{п. в. для} \quad v \in K,$$
$$u = \psi \quad \textit{для} \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = 0,$$
$$u = 0 \quad \textit{для} \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = R,$$
$$u = 0 \quad \textit{для} \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq R.$$

Здесь использовано обозначение $L^2(0, T; H^2(0, R))$ для пространства функций $u(x, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\int_0^T \int_0^R (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2)\, dx\, dt < \infty.$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Найдем решение задачи 1.2 с помощью приближений с соответствующей штрафной функцией. Штраф подберем так, чтобы доказательства существования и гладкости решений были возможно проще. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\beta_\varepsilon(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами

$$\begin{aligned} &\beta_\varepsilon(t) = 0, \quad \text{если} \quad t \geq \varepsilon, \\ &\beta_\varepsilon(0) = -1, \\ &\beta_\varepsilon'(t) > 0 \quad \text{и} \quad \beta_\varepsilon''(t) \leq 0, \quad -\infty < t < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Далее, построим последовательность $f_\varepsilon(x)$ гладких функций на $[0, R]$, которые равномерно ограничены и при $\varepsilon \to 0$ стремятся, убывая, к функции $f(x)$, определенной равенством (1.3). Наконец, выберем $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такую что

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} s_0, \\ 0 & \text{для} \quad \frac{2}{3} s_0 \leq x, \end{cases}$$

и $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Для заданных $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим смешанную краевую задачу.

Задача 2.1. *Найти функцию* $u(x, t)$, $(x, t) \in \bar{D}$, *такую что*

$$-u_{xx} + u_t + k\beta_\varepsilon(u) = f_\varepsilon \quad \textit{в} \quad D, \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &u = \varepsilon\eta, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq R, \\ &u = \psi + \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = 0, \\ &u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x = R, \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

где $k > 0$ — *константа из задачи* 1.1, *а* ψ *определено посредством* (1.4).

Хорошо известно, что задача 2.1 допускает классическое решение $u = u_\varepsilon$; см. Фридман [2].

Лемма 2.2. *Пусть* u_ε, $\varepsilon > 0$, *— решение задачи* 2.1 *в* D. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое что* $0 \leqslant (\partial u_\varepsilon/\partial t)(x, t) \leqslant K$, *где* $K > 0$ *не зависит от* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. Продифференцируем (2.2) по t и применим принцип максимума. Для $w = \partial u_\varepsilon/\partial t$ получим

$$\begin{aligned} -w_{xx} + w_t + k\beta_\varepsilon'(u_\varepsilon)\, w = 0 \qquad & \text{в} \quad D, \\ w = f_\varepsilon + \varepsilon\eta_{xx} - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon), \quad & t = 0, \\ w = \psi', \quad & x = 0, \\ w = 0, \quad & x = R. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как $\beta_\varepsilon'(u_\varepsilon) \geqslant 0$ в D, то, в силу принципа максимума,

$$\min\left(\min_{\partial_p D} w,\ 0\right) \leqslant w(x, t) \leqslant \max\left(\max_{\partial_p D} w,\ 0\right) \quad \text{в} \quad D, \tag{2.5}$$

где $\partial_p D$ — параболическая граница D, т. е. $\partial D \setminus \{(x, T) \mid 0 < x < R\}$.

Оценим сначала левую часть этого выражения. Учитывая, что $f_\varepsilon \geqslant f$ и $0 \leqslant u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon\eta(x) \leqslant \varepsilon$ для $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} s_0$, получим, что

$$\begin{aligned} w(x, 0) &\geqslant f(x) + \varepsilon\eta_{xx}(x) = \\ &= h(x) + \varepsilon\eta_{xx}(x) \geqslant 0, \quad 0 < x \leqslant \tfrac{2}{3} s_0, \end{aligned}$$

для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало, потому что $h(x)$ положительна на $[0, s_0)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= f_\varepsilon(x) - k\beta_\varepsilon(0) \geqslant h(x) + k \geqslant 0 \quad \text{для} \quad \tfrac{2}{3} s_0 \leqslant x \leqslant s_0, \\ w(x, 0) &= f_\varepsilon(x) - k\beta_\varepsilon(0) \geqslant k - k = 0 \qquad \text{для} \quad s_0 < x < R. \end{aligned}$$

Следовательно, $w(x, 0) \geqslant 0$ для $0 < x < R$. На вертикальных сторонах границы

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \psi'(t) = g(t) > 0 \quad \text{для} \quad 0 < t < T, \\ w(R, t) &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{для} \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Следовательно, $\min\left(\min\limits_{\partial_p D} w,\ 0\right) = 0.$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства (2.5). Чтобы доказать неравенство

$$\max\left(\max_{\partial_p D} w,\ 0\right) \leqslant \max(\max g,\ K_1) = K,$$

где K_1 не зависит от $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, нужно лишь заметить, что

$$|f_\varepsilon + \varepsilon\eta_{xx} - k\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)| \leqslant \sup|f_\varepsilon| + \varepsilon \sup|\eta_{xx}| + k \leqslant K_1.$$

Теперь утверждение леммы следует из (2.5). ∎

Лемма 2.3. *Пусть* u_ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ — *решение задачи* 2.1. *Тогда*

$$\|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(D)}\leqslant 1 \quad \text{для} \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Доказательство. Вследствие предыдущей леммы $\partial u_\varepsilon/\partial t\geqslant 0$ в D, поэтому, в силу (2.3), $u_\varepsilon(x, t)\geqslant 0$ в D. Учитывая свойства β_ε из (2.1), получаем, что

$$-1\leqslant\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t))\leqslant 0, \text{ если } (x, t)\in D. \blacksquare$$

Обратимся теперь к существованию и единственности решения вариационного неравенства.

Теорема 2.4. *Существует единственное решение u задачи* 1.2. *При этом* u, u_x, u_t, $u_{xx}\in L^\infty(D)$ *и* $u\geqslant 0$, $u_t\geqslant 0$ *в* D.

Пусть u_ε — *решение задачи* 2.1. *Тогда при* $\varepsilon\to 0$

$$u_\varepsilon\to u \quad \text{слабо в} \quad H^{1,p}(D), \quad 1<p<\infty,$$

и для каждого t, $0<t<T_0$,

$$u_\varepsilon\to u \quad \text{слабо в} \quad H^{2,p}(0, R), \quad 1<p<\infty.$$

Следовательно, $u_\varepsilon\to u$ *равномерно на* D *и* $u_{\varepsilon x}\to u_x$ *равномерно в* $(0, R)$ *для любого* $t\in(0, T)$.

Доказательство. Ввиду предыдущих лемм решение u_ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, задачи 2.1 удовлетворяет соотношениям

$$\|u_{\varepsilon xx}\|_{L^\infty(D)}=\|f_\varepsilon-u_{\varepsilon t}-k\beta(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(D)}\leqslant$$
$$\leqslant\|f_\varepsilon\|+K+k\leqslant C_1, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Следовательно, $u_{\varepsilon x}(x, t)$ — семейство функций, равномерно ограниченных по ε, ибо, в силу леммы 2.2, u_ε равномерно ограничены. Поэтому

$$\|u_\varepsilon\|^p_{H^{1,p}(D)}=\iint\limits_D|u_\varepsilon|^p\,dx\,dt+\iint\limits_D|u_{\varepsilon x}|^p\,dx\,dt+\iint\limits_D|u_{\varepsilon t}|^p\,dx\,dt\leqslant C_2,$$

где C_2 не зависит от ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Отсюда следует существование последовательности $\varepsilon'\to 0$ и функции $u\in H^{1,p}(D)$, $1\leqslant p<\infty$, таких что

$$u_{\varepsilon'}\to u \quad \text{в} \quad H^{1,p}(D) \tag{2.6}$$

и равномерно в $\bar{D}$. В частности, $u\geqslant 0$ и удовлетворяет граничным условиям задачи 1.2.

Кроме того, для каждого фиксированного t, $0<t<T$, некоторая подпоследовательность последовательности $u_{\varepsilon'}$ сходится слабо к u в $H^{2,p}(0, R)$, $1\leqslant p<\infty$. Но $u_{\varepsilon'}\to u$ равномерно в D, откуда следует, что вся последовательность $u_{\varepsilon'}\to u$ слабо в $H^{2,p}(0, R)$, $0<t<T$. В частности, $u_{xx}\in L^\infty(D)$.

Для завершения доказательства того, что u является решением задачи 1.2, возьмем $v\in L^\infty(D)$, удовлетворяющее неравенству $v\geqslant$

$\geqslant \delta > 0$. Умножая (2.2) на $v - u_\varepsilon$ и замечая, что $\beta_\varepsilon(v) = 0$, если $\varepsilon < \delta$, получим, что

$$(-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t})(v - u_\varepsilon) - k[\beta_\varepsilon(v) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)](v - u_\varepsilon) = f_\varepsilon(v - u_\varepsilon), \qquad \varepsilon < \delta.$$

Интегрируя по $x \in [0, R]$ и учитывая, что $[\beta_\varepsilon(v) - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)](v - u_\varepsilon) \geqslant \geqslant 0$, получим неравенство

$$\int_0^R (-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t})(v - u_\varepsilon)\,dx \geqslant \int_0^R f_\varepsilon (v - u_\varepsilon)\,dx.$$

Взяв $\varepsilon \to 0$ и используя слабую сходимость, будем иметь

$$\int_0^R (-u_{xx} + u_t)(v - u)\,dx \geqslant \int_0^R f(v - u)\,dx. \tag{2.7}$$

С помощью замыкания устанавливается, что (2.7) справедливо для всех $v \geqslant 0$, $v \in L^2(0, R)$. Отсюда следует, что u — решение задачи 1.2.

Легко видеть, что решение единственно в $L^2(0, T; H^2(0, R))$. Отсюда следует, в частности, что вся последовательность u_ε сходится слабо к u в $H^{1,p}(D)$ и в $H^{2,p}(0, R)$ для каждого t, $0 < t < T$. Неравенство $u_t \geqslant 0$ вытекает из леммы 2.2. ∎

Следствие 2.5. *Пусть u — решение задачи* 1.2 *и*

$$\Omega(t) = \{x \in (0, R) \mid u(x, t) > 0\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тогда $\Omega(t) \subset \Omega(t')$ для $t < t'$, $t, t' \in [0, T]$.

Доказательство. Это очевидно, так как u — липшицева функция и $u_t \geqslant 0$. ∎

Покажем теперь, что заданные $T > 0$, $R > 0$ можно выбрать так, что $u = 0$ в окрестности $x = R$. Отсюда следует существование свободной границы. Сначала докажем теорему сравнения, аналогичную нашему слабому принципу максимума из гл. II.

Лемма 2.6. *Пусть $f \leqslant \hat{f}$ и $\psi \leqslant \hat{\psi}$, а u, $\hat{u}$ — решения задачи* 1.2 *соответственно с f, ψ и $\hat{f}$, $\hat{\psi}$. Тогда $u \leqslant \hat{u}$ в D.*

Доказательство. Пусть K^* — множество неотрицательных функций v из $H^1(D)$, удовлетворяющих граничным условиям задачи 1.2 ($v(0, t) = \hat{\psi}$). Тогда для $v \in K^*$ справедлива интегральная форма задачи 1.2:

$$\iint_D [\hat{u}_x (v - \hat{u})_x + \hat{u}_t (v - \hat{u})]\,dx\,dt \geqslant \iint_D \hat{f}(v - \hat{u})\,dx\,dt, \qquad v \in K^*.$$

В этом выражении можно взять $v = \max(u, \hat{u}) \in K^*$, так как $\psi \leqslant \hat{\psi}$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\iint_A [\hat{u}_x (u - \hat{u})_x + \hat{u}_t (u - \hat{u})]\,dx\,dt \geqslant \iint_A \hat{f}(u - \hat{u})\,dx\,dt, \\ A = \{(x, t) \mid u(x, t) > \hat{u}(x, t)\}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Далее, отметим, что $-u_{xx}+u_t=f$ п. в. в A, так как на этом множестве $u>\hat{u}\geqslant 0$. Следовательно, для $\zeta=\max(u-\hat{u},\ 0)$, равной нулю на $\partial_p D$,

$$-\iint_D [u_x\zeta_x+u_t\zeta]\,dx\,dt=-\iint_D f\zeta\,dx\,dt. \tag{2.9}$$

Записывая (2.8) в терминах ζ, будем иметь

$$\iint_D [\hat{u}_x\zeta_x+\hat{u}_t\zeta]\,dx\,dt\geqslant\iint_D \hat{f}\zeta\,dx\,dt. \tag{2.10}$$

Складывая (2.9) и (2.10) и опять используя определение ζ, получим

$$-\iint_D \zeta_x^2\,dx\,dt-\frac{1}{2}\int_0^R \zeta(x,\ T)^2\,dx\geqslant\iint_D (\hat{f}-f)\,\zeta\,dx\,dt\geqslant 0.$$

Поэтому $\zeta=0$ п. в. в D, т. е. $\operatorname{mes} A=0$. ∎

Мы можем теперь построить точное решение задачи Стефана, которое используем для оценки сверху нашего решения u. Обозначим через N_M множество

$$N_M=\{x\,|\,|x|<M(t+1)^{1/2}\},$$

где M — положительная константа, которая будет определена ниже. Положим $\hat{\Theta}(x,\ t)=F(x/(t+1)^{1/2})$ и $\Phi(x,\ t)=x-M(1+t)^{1/2}$, $x\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, где

$$F(z)=C\int_z^\infty e^{-\zeta^2/4}\,d\zeta-C'$$

с C, C', удовлетворяющими соотношениям

$$2(C/M)\,e^{-M^2/4}=k, \tag{2.11}$$

$$F(M)=C\int_M^\infty e^{-\zeta^2/4}\,d\zeta-C'=0. \tag{2.12}$$

Легко видеть, что $\hat{\Theta}(x,\ t)$ и кривая $\hat{\Gamma}$, определенная соотношением $\Phi(x,\ t)=0$, являются решением классической задачи Стефана 1.1 с $\hat{h}(x)=F(x)$, $0\leqslant x\leqslant M$ и $\hat{g}(t)=F(0)$, $0\leqslant t\leqslant T$. Следовательно, $\hat{\Theta}$ определяет решение $\hat{u}$ задачи 1.2 с помощью (1.2). Отметим, что удельная теплота плавления k в случае $\hat{\Theta}$, $\hat{\Gamma}$ и в случае u одна и та же.

Очевидно, что $C=\frac{kM}{2}e^{M^2/4}\to\infty$ при $M\to\infty$, в то время как

$$C'=\frac{kM}{2}\int_M^\infty e^{(M^2-\zeta^2)/4}\,d\zeta\leqslant\frac{k}{2}\sum_M^\infty (n+1)\,e^{(M^2-n^2)/4}<\infty$$

ограничено при $M \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших M имеем $\hat{h}(x) \geqslant h(x)$ и $\hat{g}(t) \geqslant g(t)$.

Теперь, используя лемму 2.6, можно заключить, что $\hat{u} \geqslant u$ в D. Так как $\hat{u}(x, t) = 0$ при $x \geqslant M(t+1)^{1/2}$, то

$$\Omega(t) \subset \{x \mid 0 < x < M(t+1)^{1/2}\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В итоге получаем

Предложение 2.7. *По заданному* $T > 0$ *можно найти такое* $R > 0$, *что решение* u *задачи* 1.2 *равно нулю в окрестности* $x = R$.

Доказательство. Достаточно выбрать M, как выше, и $R > M(T+1)^{1/2}$. ▮

В дальнейшем всегда предполагается, что R выбрано столь большим, что выполнено утверждение предложения 2.7. Положим

$$\begin{aligned} &\Omega = \{(x, t) \mid u(x, t) > 0\}, \\ &\Omega(t) = \{x \mid (x, t) \in \Omega\}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &\Gamma = \partial\Omega \cap D. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Теорема 2.8. *Пусть* u — *решение задачи* 1.2. *Тогда* Γ, *определенное в* (2.13), *допускает представление* Γ: $x = \sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *где* σ — *непрерывная возрастающая функция от* t *с* $s_0 = \sigma(0) < \sigma(t)$ *при* $t > 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\Omega(t)$ связно, откуда будет следовать, что $\sigma(t)$ корректно определена. Интервал $(0, s_0) \subset \Omega(t)$ для любого t, так как $u_t \geqslant 0$. Предположим, что (x_1, x_2) — компонента открытого множества $\Omega(t)$, не содержащая $(0, s_0)$. Тогда $-u_{xx}(x, t) = -k - u_t(x, t) < 0$ в (x_1, x_2), поэтому, согласно принципу максимума,

$$u(x, t) \leqslant \max(u(x_1, t), u(x_2, t)) = 0, \quad x_1 < x < x_2.$$

Полученное противоречие доказывает связность $\Omega(t)$.

Определим

$$\begin{aligned} &\sigma(t) = \sup\{x \mid x \in \Omega(t)\}, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &\sigma(0) = s_0. \end{aligned}$$

Так как $\Omega(t) \subset \Omega(t')$ для $t < t'$, то σ — монотонная функция. Предположим теперь, что $x_1 = \sigma(t) < \lim\limits_{\substack{t' \to t \\ t' > t}} \sigma(t') = x_2$ для некоторого t, $0 \leqslant t < T$. В этом случае прямоугольник

$$Q = \{(x, \tau) \mid x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon, \ t < \tau < T\} \subset \Omega$$

при малом $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned} &-u_{xx} + u_\tau = -k \quad \text{в} \quad Q, \\ &u(x, t) = 0 \quad \text{для} \quad x_1 + \varepsilon < x < x_2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу результатов о гладкости решений параболических уравнений, u — гладкая функция в $\bar{Q}$ и поэтому

$$u(x,\ t)=u_x(x,\ t)=u_{xx}(x,\ t)=0 \quad \text{для} \quad x_1+\varepsilon<x<x_2-\varepsilon.$$

Из этого уравнения находим, что $u_t(x,\ t)=-k$ для $x_1+\varepsilon<x<$ $<x_2-\varepsilon$, следовательно, $u_\tau(x,\ \tau)<0$ в окрестности из Q точки $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ t\right)$. Это противоречит утверждению нашей теоремы существования, т. е. теоремы 2.4. Таким же образом можно показать, что $\sigma(t)$ непрерывна при стремлении к t снизу.

Наконец, покажем, что $\sigma(t)>s_0$ при $t>0$. Допустим противное, т. е. что $\sigma(t_0)=s_0$ для некоторого $t_0>0$. В силу монотонности σ, $\sigma(t)=s_0$ для $0\leqslant t\leqslant t_0$. Рассмотрим прямоугольник

$$Q=\{(x,\ t)\mid s_0-\varepsilon<x<s_0,\ 0<t<t_0\}\subset\Omega$$

при малом $\varepsilon>0$ и заметим, что

$$\begin{aligned} -u_{xx}+u_t=f=h\geqslant 0 \quad & \text{в} \quad Q,\\ u=0 \quad & \text{для} \quad x=s_0, \quad 0<t<t_0,\\ u>0 \quad & \text{для} \quad x=s_0-\varepsilon, \quad 0<t<t_0. \end{aligned}$$

Так как u_x непрерывна в D и u достигает минимума при $x=s_0$, то

$$u_x(s_0,\ t)=0 \quad \text{для} \quad 0<t<t_0. \tag{2.14}$$

Рассмотрим решение $v(x,\ t)$ задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -v_{xx}+v_t=h \quad & \text{в} \quad Q,\\ v=0 \quad & \text{на} \quad \partial_p Q, \end{aligned}$$

где $\partial_p Q$ — параболическая граница Q. Так как $h\geqslant 0$, то $v\geqslant\min\limits_{\partial_p\Omega} v=0$ в Q. Следовательно, согласно принципу максимума Хопфа — Фридмана,

$$v_x(s_0,\ t)<0, \quad 0<t<t_0. \tag{2.15}$$

С другой стороны, $u-v$ является решением уравнения теплопроводности в Q с $u-v\geqslant 0$ на $\partial_p Q$. Следовательно, так как u отлично от v, то $(u-v)_x(s_0,\ t)<0$, потому что $u-v$ достигает здесь своего минимума. Комбинируя это неравенство с (2.14) и (2.15), получим требуемое противоречие:

$$0=u_x(s_0,\ t)\leqslant v_x(s_0,\ t)<0, \quad 0<t<t_0. \ \blacksquare$$

Полезно отметить, что Γ — липшицева кривая в координатах, полученных из $(x,\ t)$ поворотом на $\pi/4$. Следовательно, для функции $\zeta\in H^1(\Omega)$ определено сужение на Γ из $L^2(\Gamma)$.

3. СВОЙСТВА ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ

Для изучения свободной границы Г в задаче Стефана полезно знать, являются ли функции $u_{xx}(x, t)$ и $u_{xt}(x, t)$ непрерывными в Ω в окрестности Г. Этот факт устанавливается в два этапа. Сначала методом штрафа доказывается включение $u_t \in H^1(D \cap \{t \geqslant t_0 > 0\}$. Затем применяется слабый принцип максимума и метод Бернштейна для доказательства липшицевости функции u_t в Ω около Г.

Лемма 3.1. *Пусть* u_ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, — *решение задачи* 2.1. *Тогда*

$$\left|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x\, \partial t}(x, t)\right| \leqslant C \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0/6, \quad 0 < t < T,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant C \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0/6, \quad 0 < t < T,$$

где $C > 0$ *не зависит от* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. Из начального условия (2.2) получаем, что $u_\varepsilon(x, 0) = \varepsilon$ при $0 \leqslant x \leqslant s_0/3$, поэтому, так как $u_{\varepsilon t}(x, t) \geqslant 0$ в D,

$$u_\varepsilon(x, t) \geqslant \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant s_0/3, \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Следовательно, $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t)) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant s_0/3$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и u_ε является решением уравнения

$$-u_{\varepsilon xx} + u_{\varepsilon t} = f_\varepsilon, \quad 0 < x < s_0/3, \quad 0 < t < T.$$

Утверждение теперь следует из стандартной теории Шаудера для уравнения теплопроводности (Фридман [2]). ∎

Лемма 3.2. *Пусть* u_ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, — *решение задачи* 2.1. *Тогда*

$$\iint_D u_{\varepsilon xt}(x, t)^2\, dx\, dt \leqslant C,$$

где $C > 0$ *не зависит от* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство. До конца доказательства положим $u = u_\varepsilon$, $\beta = \beta_\varepsilon$ и $w = u_{t\varepsilon}$. Дифференцируя уравнение (2.2) по t и умножая на w, получим, что

$$-ww_{xx} + ww_t + k\beta'(u)\, w^2 = 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Интегрируя это равенство на $(0, R)$ при фиксированном t, $0 < t < T$, будем иметь

$$-\int_0^R ww_{xx}\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R w^2\, dx + k\int_0^R \beta'(u)\, w^2\, dx = 0. \tag{3.1}$$

Проинтегрируем первый член по частям. Тогда

$$-\int_0^R ww_{xx}\, dx = \int_0^R w_x^2\, dx + w(0, t)\, w_x(0, t) - w(R, t)\, w_x(R, t) =$$

$$= \int_0^R w_x^2\, dx + w(0, t)\, w_x(0, t),$$

так как $w(R, t) = u_t(R, t) = 0$. В силу предыдущей леммы,

$$|w(0, t)\, w_x(0, t)| \leqslant |\psi_t(t)\, u_{\varepsilon xt}(0, t)| \leqslant \mathrm{const} = C_1.$$

Поэтому, вспоминая, что $\beta'(u) \geqslant 0$, получим из (3.1), что

$$\int_0^R w_x^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R w^2\, dx \leqslant C_1.$$

Интегрируя это неравенство на $(0, T)$, найдем, что

$$\int_0^T \int_0^R w_x^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^R [w(x, R)^2 - w(x, 0)^2]\, dx \leqslant C_1 T.$$

Согласно лемме 2.2, $|w(x, t)| \leqslant K$, где K не зависит от ε, следовательно,

$$\int_0^T \int_0^R w_x^2\, dx\, dt \leqslant C_1 T + RK^2. \quad \blacksquare$$

Лемма 3.3. *Пусть* u_ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *— решение задачи* 2.1. *Тогда при* $0 < \sigma \leqslant t < T$

$$\int_0^R u_{\varepsilon xt}(x, t)^2\, dx + \int_\sigma^t \int_0^R u_{\varepsilon tt}(x, \tau)^2\, dx\, d\tau \leqslant \frac{C}{\sigma},$$

где $C > 0$ *— константа, не зависящая от* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Эта лемма чуть посложнее. По сути дела она приводит к критерию интегрируемости решения u, о котором упоминалось в начале параграфа. Между прочим, мы используем здесь предположение, что $\beta_\varepsilon''(t) \leqslant 0$.

Доказательство. Как и раньше, положим $u = u_\varepsilon$, $\beta = \beta_\varepsilon$ и $w = u_{\varepsilon t}$. Дифференцируя уравнение (2.2) по t и умножая на w_t, получим, что

$$-w_{xx}w_t + w_t^2 + k\beta'(u)\, w_t w = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

а после интегрирования на $(0, R)$ будем иметь

$$-\int_0^R w_{xx}w_t\, dx + \int_0^R w_t^2\, dx + k\int_0^R \beta'(u)\, w w_t\, dx = 0. \tag{3.2}$$

Мы начинаем, как обычно, с первого члена:

$$-\int_0^R w_{xx}w_t\, dx = \int_0^R w_x w_{xt}\, dx + w_x(0, t)\, w_t(0, t) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R w_x^2\, dx + w_x(0, t)\, w_t(0, t), \quad 0 < t < T.$$

Граничный член при $x=R$ отсутствует, так как там $w=w_t=0$. При $x=0$, используя лемму 3.1 и наши предположения относительно ψ, заключаем, что

$$|w_x(0, t)\, w_t(0, t)| \leqslant |w_x(0, t)|\, |\psi_{tt}(t)| \leqslant C_2,$$

где C_2 не зависит от ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Следовательно, в силу (3.2),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R w_x^2\,dx+\int_0^R w_t^2\,dx+\frac{1}{2}k\int_0^R \beta'(u)\frac{\partial}{\partial t}w^2\,dx\leqslant C_2. \tag{3.3}$$

Для оценки последнего члена запишем равенство

$$\int_0^R \beta'(u)\frac{\partial}{\partial t}w^2\,dx=\int_0^R \frac{\partial}{\partial t}[\beta'(u)\,w^2]\,dx-\int_0^R \beta''(u)\,w^3\,dx.$$

Так как $w\geqslant 0$ (в этом месте мы существенно используем лемму 2.2) и, кроме того, $\beta''(u)\leqslant 0$, то $-\int_0^R \beta''(u)\,w^3\,dx\geqslant 0$. Поэтому

$$\int_0^R \beta'(u)\frac{\partial}{\partial t}w^2\,dx\geqslant\frac{d}{dt}\int_0^R \beta'(u)\,w^2\,dx.$$

Подставляя эту оценку в (3.3), получим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R [w_x^2+k\beta'(u)\,w^2]\,dx+\int_0^R w_t^2\,dx\leqslant C_2.$$

Интегрируя это неравенство на (τ, t), где $\tau<t$, получим оценку

$$\int_0^R [w_x(x, t)^2+k\beta'(u)\,w(x, t)^2]\,dx+2\int_\tau^t\int_0^R w_t^2\,dx\,d\tau'\leqslant$$
$$\leqslant 2C_2(t-\tau)+\int_0^R [w_x(x, \tau)^2+k\beta'(u)\,w(x, \tau)^2]\,dx.$$

Так как эта оценка выполнена для каждого $\tau<t$, то мы можем проинтегрировать ее по τ на интервале $(0, \sigma)$, где $\sigma<t$. В резуль-

тате получим, что

$$\sigma\int_0^R w_x(x,\ t)^2\,dx+2\sigma\int_\sigma^t\int_0^R w_\tau^2\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sigma\int_0^R[w_x(x,\ t)^2+k\beta'(u)\,w(x,\ t)^2]\,dx+2\sigma\int_\sigma^t\int_0^R w_\tau^2\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_3+\int_0^\sigma\int_0^R\left[w_x(x,\ \tau)^2+kw(x,\ \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\beta(u(x,\ \tau))\right]dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_3+\int_0^T\int_0^R w_x(x,\ \tau)^2\,dx\,d\tau+Kk\int_0^T\int_0^R\frac{\partial}{\partial\tau}\beta(u(x,\tau))\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_3+\int_0^T\int_0^R w_x(x,\ \tau)^2\,dx\,d\tau+Kk\int_0^R[\beta(u(x,\ T))-\beta(u(x,\ 0))]\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_3+\int_0^T\int_0^R w_x(x,\ \tau)^2\,dx\,d\tau+2RKk.$$

Здесь мы использовали тот факт, что β' и w неотрицательны, а также лемму 2.3. Ввиду леммы 3.2 лемма доказана. ∎

Теорема 3.4. *Пусть u — решение задачи 1.2. Тогда существует такая константа $C>0$, что для каждого $\sigma>0$*

$$\int_0^R u_{xt}(x,\ t)^2\,dx+\int_\sigma^t\int_0^R u_{\tau\tau}(x,\ \tau)^2\,dx\,d\tau\leqslant\frac{C}{\sigma}\quad\text{для}\quad\sigma<t<T.$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из леммы 3.3 в силу слабой сходимости $u_{\varepsilon t}$ к u_t в L^p. В частности, заметим, что $u_t\in H^1(D\cap\{(x,\ t)\,|\,t\geqslant\sigma\})$ для каждого $\sigma>0$. ∎

Приступим к следующей части нашей программы: доказательству липшицевой непрерывности u_t около Γ.

Лемма 3.5. *Пусть u — решение задачи 1.2, а Γ — соответствующая ему свободная граница. Тогда для $(x_0,\ t_0)\in\Gamma$ существует такая окрестность U точки $(x_0,\ t_0)$, что $u_x(x,\ t)<0$ в $U\cap\Omega$.*

Доказательство. Это утверждение элементарно. В силу теоремы 2.8, существует окрестность U точки $(x_0,\ t_0)\in\Gamma$, такая что $U\subset\{(x,\ t)\,|\,x>>s_0,\ t>0\}$. Следовательно, $f(x)=-k$ в U и

$$u_{xx}(x,\ t)=u_t(x,\ t)+k\geqslant k>0\quad\text{в}\quad U\cap\Omega.$$

Поэтому $u_x(x,\ t)=-\int_x^\sigma u_{xx}(y,\ t)\,dy<0$ в $U\cap\Omega$. ∎

Лемма 3.6. *Пусть* Γ — *свободная граница, соответствующая решению* u *задачи* 1.2, *и* $Q=\{(x, t)\,|\,|x-x_0|<\varepsilon,\ 0<t_0-t<\delta\}$ *для заданных* $(x_0, t_0)\in\Gamma$ *и* $\varepsilon>0$, $\delta>0$. *Предположим, что* w, $\Theta\in H^1(Q\cap\Omega)$, *причем*

$$-w_{xx}+w_t\geqslant 0 \quad \text{в} \quad Q\cap\Omega,$$

$$-\Theta_{xx}+\Theta_t=0 \quad \text{в} \quad Q\cap\Omega,$$

$$w\geqslant\Theta \quad \text{на} \quad \partial_p(Q\cap\Omega),$$

где $\partial_p(Q\cap\Omega)=\partial(Q\cap\Omega)\setminus\{(x, t_0)\,|\,|x-x_0|<\varepsilon\}$ — *параболическая граница множества* $Q\cap\Omega$. *Тогда*

$$w\geqslant\Theta \quad \text{в} \quad Q\cap\Omega.$$

Доказательство этого принципа максимума аналогично доказательству слабого принципа максимума из гл. II. Мы оставляем его в качестве упражнения.

Лемма 3.7. *Пусть* u — *решение задачи* 1.2 *и* Γ — *ее свободная граница. Тогда для каждой точки* $(x_0, t_0)\in\Gamma$ *с* $t_0\geqslant\delta>0$

$$0\leqslant u_t(x, t_0)\leqslant c_1(x-x_0)^2-c_2xu_x(x, t) \quad \text{для} \quad (x, t)\in Q\cap\Omega,$$

где c_1, c_2 *и* ε — *положительные константы, не зависящие от* $(x_0, t_0)\in\Gamma$, $t_0\geqslant\delta>0$, *а* $Q=\{(x, t)\,|\,|x-x_0|<\varepsilon$ *и* $|t-t_0|<\varepsilon\}$.

Доказательство. Подытожим сначала наши знания об u_t. Мы знаем, что, в силу теоремы 3.4, существует такая окрестность $Q=\{(x, t)\,|\,|x-x_0|<\varepsilon,\ |t-t_0|<\varepsilon\}$, что $u_t\in H^1(Q)$. Так как кривая Γ липшицева, то u_t имеет след $u_t(\sigma(t), t)$ на $\Gamma\cap Q$. Чтобы увидеть, что этот след равен нулю, заметим просто, что $u_t(x, t)=\lim\limits_{\mu\to 0}u_t(x+\mu, t)$ в $H^1(Q)$ и что $u_t=0$ в $Q\setminus\Omega$. Так как оператор следа является непрерывным отображением из $H^1(Q)$ в $L^2(\Gamma\cap Q)$, то $\mathrm{Tr}_\Gamma u_t=0$.

Заметим также, что

$$-u_{txx}+u_{tt}=0 \quad \text{в} \quad Q\cap\Omega. \tag{3.4}$$

Положим

$$w(x, t)=c_1(x-x_0)^2-c_2xu_x(x, t), \qquad (x, t)\in Q\cap\Omega,$$

и выберем $c_1>0$ настолько большим, что $c_1(x-x_0)^2\geqslant u_t(x, t)$ для $(x, t)\in\partial_p(Q\cap\Omega)$. Это, очевидно, возможно, так как $u_t=0$ на Γ. Выберем теперь $c_2>0$ настолько большим, чтобы

$$-w_{xx}+w_t=-2c_1+2c_2u_{xx}\geqslant-2c_1+2kc_2>0 \quad \text{в} \quad Q\cap\Omega. \tag{3.5}$$

Согласно лемме 3.5, $u_x(x, t)\leqslant 0$ в $Q\cap\Omega$ при соответствующем Q, поэтому $w\geqslant u_t$ на $\partial_p(Q\cap\Omega)$. В силу (3.4), (3.5), мы можем применить принцип максимума из леммы 3.6, и, следовательно, $0\leqslant u_t(x, t)\leqslant w(x, t)$, $(x, t)\in Q\cap\Omega$. ∎

В частности, из этой леммы следует, что u_t непрерывна.

Теорема 3.8. *Пусть u — решение задачи 1.2, а Γ — ее свободная граница. Тогда для каждой точки $(x_0, t_0) \in \Gamma$ существует такая окрестность U этой точки, что $u_t \in H^{1,\infty}(U)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $u_t \in H^{1,\infty}(U \cap \Omega)$. Выберем Q, как в предыдущих леммах; тогда выполняется заключение леммы 3.7. Положим $\Theta = u_t$. Применим здесь метод С. Бернштейна, но не к функции Θ, чья гладкость на Γ неизвестна, а к ее аппроксимациям (Бернштейн [1]).

Пусть $\alpha(\zeta) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — сглаживатель. Положим

$$\alpha_h(\xi) = (1/h)\,\alpha(\xi/h) \quad \text{для} \quad 0 < h < 1,$$

$$\Theta_h(x, t) = \int_0^R \alpha_h(x-\xi)\,\Theta(\xi, t)\,d\xi, \quad (x, t) \in Q,$$

$$\Omega_h = \{(x, t) \mid 0 < x < \sigma(t) - h,\ 0 < t < T\}.$$

Отметим, что $-\Theta_{hxx} + \Theta_{ht} = 0$ в $\Omega_h \cap Q$ и

$$0 \leqslant \Theta_h(x, t) \leqslant \sup \Theta \quad \text{в} \quad \Omega_h \cap Q. \tag{3.6}$$

Выведем теперь из оценки леммы 3.7 оценку для Θ_{hx} на $\Gamma \cap Q$. Заметим сначала, что, когда $(x, t) \in \partial\Omega_h \cap Q$, существует такое y, что $|x - y| = h$ и $(y, t) \in \Gamma$. Поэтому, в силу леммы 3.7,

$$0 \leqslant \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \leqslant \sup_{|y-\xi|<2h} \Theta(\xi, t) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|y-\xi|<2h} \{c_1(y-\xi)^2 - c_2\xi u_\xi(\xi, t)\} \leqslant c_1 h,$$

так как $u_x(x, t)$ — липшицева функция по x. Итак, мы установили, что

$$0 \leqslant \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \leqslant c_1 h \quad \text{для} \quad (x, t) \in \partial\Omega_h \cap Q. \tag{3.7}$$

Для любой точки $(x, t) \in \partial\Omega_h \cap Q$ ввиду (3.7) имеем

$$|\Theta_{hx}(x, t)| \leqslant \int_{|x-\xi|<h} |\alpha_{hx}(x-\xi)|\,\Theta(\xi, t)\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \int_{|x-\xi|<h} |\alpha_{hx}(x-\xi)|\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h} \sup_{|x-\xi|<h} \Theta(\xi, t) \int_{|\eta|\leqslant 1} |\alpha_\eta(\eta)|\,d\eta \leqslant c_2. \tag{3.8}$$

Выберем теперь функцию $\zeta \in C_0^\infty(Q)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta = 1$ около (x_0, t_0), и положим

$$w = w_h = \zeta^2\Theta_{hx}^2 + \mu\Theta_h^2, \quad (x, t) \in Q \cap \Omega_h.$$

Применяя к w оператор теплопроводности, получим, что

$$-\Delta w + w_t = -2\{\zeta^2\Theta_{hxx}^2 + 4\zeta\zeta_x\Theta_{hx}\Theta_{hxx} + \Theta_{hx}^2[(\zeta\zeta_x)_x - \zeta_t + \mu]\} \leqslant$$
$$\leqslant -2\{(1-\varepsilon)\zeta^2\Theta_{hxx}^2 + \Theta_{hx}^2[\mu + (\zeta\zeta_x)_x - \zeta_t - (4/\varepsilon)\zeta_x^2]\} \leqslant 0 \quad (3.9)$$

для $\mu \geqslant 0$, зависящих только от ζ. Следовательно, в силу принципа максимума, а также (3.8) и (3.6),

$$w(x, t) \leqslant \max_{\partial_p(\Omega_h \cap Q)} w \leqslant c_2^2 + \mu(\sup\Theta)^2.$$

Рассматривая это неравенство в окрестности U точки (x_0, t_0), где $\zeta = 1$, и переходя к пределу при $h \to 0$, получим, что

$$|u_{tx}(x, t)| \leqslant \text{const} \quad \text{в} \quad \Omega \cap U.$$

В частности, отсюда следует, что u_x — липшицева функция по t, поэтому, применяя оценку леммы 3.7, легко вывести, что

$$0 \leqslant u_t(x, t) \leqslant \text{const}\sqrt{(x-x_0)^2 - (t-t_0)^2},$$

когда $(x_0, t_0) \in \Gamma$, а $(x, t) \in U \cap \Omega$. Для завершения доказательства теоремы нужно ввести осреднение Ψ_h функции u_t по переменной t и рассмотреть дифференциальное неравенство, аналогичное (3.9), для функции $z = z_h = \zeta^2\Psi_{ht}^2 + \mu\Psi_{hx}^2$. Восполнение деталей рассуждений предоставляется читателю. ▌

Закончим этот параграф следующей теоремой.

Теорема 3.9. *Пусть u — решение задачи 1.2, а Γ — ее свободная граница. Тогда для каждой точки $(x_0, t_0) \in \Gamma$ существует такая окрестность U этой точки, что u_{xx}, $u_{xt} \in C(\bar{\Omega} \cap U)$.*

Доказательство. Выберем U, как в предыдущей теореме. Так как $u_{xx} = u_t + k$ для $(x, t) \in U \cap \Omega$, то u_{xx} не только непрерывная, но и липшицева функция в $U \cap \bar{\Omega}$. Дифференцируя по t, получим, что $u_{txx} = u_{tt} \in L^\infty(U \cap \Omega)$, и поэтому

$$|u_{xt}(x, t) - u_{xt}(x', t)| < C|x - x'|, \quad (x, t), (x', t) \in U \cap \Omega,$$

с константой C, не зависящей от t. Более того, u_{xt}, будучи решением уравнения теплопроводности в $U \cap \Omega$, непрерывна в этой области.

Наконец, пусть $(x, t) \in \Gamma \cap U$ и $(x, t') \in U \cap \Omega$. При заданном $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|u_{xt}(x, t) - u_{xt}(x, t')| \leqslant |u_{xt}(x, t) - u_{xt}(x-\varepsilon, t)| +$$
$$+ |u_{xt}(x-\varepsilon, t) - u_{xt}(x-\varepsilon, t')| + |u_{xt}(x-\varepsilon, t') - u_{xt}(x, t')| \leqslant$$
$$\leqslant 2C\varepsilon + |u_{xt}(x-\varepsilon, t) - u_{xt}(x-\varepsilon, t')|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t' \to t} |u_{xt}(x, t) - u_{xt}(x, t')| \leqslant 2C\varepsilon$, что доказывает теорему. ▌

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Применение преобразования Лежандра к краевой задаче со свободной границей для u приводит к новой задаче с гладкой «свободной» границей, однако с сильно нелинейным уравнением даже в простейшем случае. Пусть в этом параграфе u обозначает решение задачи 1.2, а Γ — ее свободную границу. Если $(x_0, t_0) \in \Gamma$ — заданная точка, то пусть U — ее окрестность, такая что $u_x \in C^1(\overline{\Omega} \cap U)$. Так как кривая Γ липшицева, то легко проверить, что из включений u_{xx}, $u_{xt} \in C(\overline{\Omega} \cap U)$ следует, что $u_x \in C^1(\overline{\Omega} \cap U)$, и в действительности u_x допускает C^1-продолжение на всю окрестность U.

Введем теперь преобразование

$$\begin{aligned} \xi &= -u_x(x, t), \\ \tau &= t, \end{aligned} \qquad (x, t) \in U. \tag{4.1}$$

Это отображение является отображением класса C^1, причем

$$\frac{\partial(\xi, \tau)}{\partial(x, t)} = \begin{pmatrix} -u_{xx}(x, t) & -u_{xt}(x, t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Так как $u_{xx}(x_0, t_0) = k > 0$, то отображение $\partial(\xi, \tau)/\partial(x, t)$ обратимо в точке (x_0, t_0), и поэтому (4.1) отображает окрестность, скажем $U \cap \Omega$, взаимно однозначно на область $G \subset \{(\xi, \tau) \mid \xi > 0\}$. Напомним здесь, что $u_x < 0$ в Ω около Γ. Кроме того, $U \cap \Gamma$ отображается на подмножество $\Sigma \subset \{(\xi, \tau) \mid \xi = 0\}$, ввиду того что $u_x = 0$ на Γ.

Преобразованием Лежандра функции u является функция

$$v(\xi, \tau) = x\xi + u(xt), \quad (\xi, \tau) \in G \cup \Sigma, \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \cap U.$$

При этом

$$dv = x\, d\xi + \xi\, dx + u_x\, dx + u_t\, dt = x\, d\xi + u_t\, d\tau,$$

или $v_\xi = x$ и $v_\tau = u_t$. В частности, на основании (4.2)

$$v_{\xi\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{(\partial\xi/\partial x)} = -\frac{1}{u_{xx}}.$$

Наша задача со свободной границей имеет вид

$$\begin{aligned} -u_{xx} + u_t &= -k \quad \text{в} \quad \Omega \cap U, \\ u = u_x &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \cap U. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В терминах v эта краевая задача записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (1/v_{\xi\xi}) + v_\tau &= -k \quad \text{в} \quad G, \\ v &= 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Новая задача (4.4) является параболической, потому что линеаризация L оператора, соответствующего этой задаче, имеет вид

$$L\zeta = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{1}{(v+\varepsilon\zeta)_{\xi\xi}} + (v+\varepsilon\zeta)_\tau\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} = -(\zeta_{\xi\xi}/v_{\xi\xi}^2) + \zeta_\tau;$$

таким образом, L — параболический оператор с непрерывными коэффициентами. Из теории нелинейных параболических уравнений (Ладыженская и др. [1]) следует, что $v \in C^{\infty}(G \cup \Sigma)$. Поэтому $\Gamma \cap U$: $x = v_{\xi}(0, \tau)$, где $|\tau - \tau_0|$ мало, является C^{∞}-параметризацией части Γ. Итак, доказана

Теорема 4.1. *Пусть u — решение задачи* 1.2, *а* Γ — *ее свободная граница. Тогда* Γ — *кривая класса* C^{∞}.

Заметим, что, вообще говоря, Γ не может быть аналитической.

Комментарии и библиографические указания

Классическая задача Стефана для произвольной размерности обсуждается в работе Фридмана [3]. Интерпретация однофазовой задачи в виде вариационного неравенства предложена в работе Дюво [1]. Дальнейшее развитие этого подхода и исследование свойств решения этого неравенства имеется в работе Фридмана и Киндерлерера [1]. Обсуждение ряда общих вопросов, касающихся свободной границы, читатель найдет в работах Киндерлерера и Ниренберга [2, 3]. Интересное доказательство бесконечной дифференцируемости Γ ($N = 1$) предложено Шеффером [1]. Кроме того, в этом случае показано, что поверхность Γ аналитична, если только подаваемое тепло задается аналитической функцией (Фридман [4]).

Недавно Кафарелли и Фридман [2] показали, что температура в N-мерной однофазовой задаче непрерывна.

По образцу задачи Стефана можно решать многие задачи, связанные с вариационными и квазивариационными неравенствами параболического типа. К ним относятся, например, задачи о времени остановки, задачи оптимального и импульсного управления. Мы отсылаем читателя, например, к работам Бенсуссана и Лионса [1] и Фридмана [5].

БИБЛИОГРАФИЯ

Агмон, Дуглис, Ниренберг (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)

1. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623—727. [Русский перевод: Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. — М.: ИЛ, 1962.]
2. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II, *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1964), 35—92.

Альт (Alt H.)

1. A free boundary problem associated with the flow of groundwater, *Arch. Rational Mech. Anal.* **64** (1977), 111—126.
2. The fluid flow through porous media: regularity of the free surface, *Manus. Math.* **21** (1977), 255—272.

Байокки (Baiocchi C.)

1. Su un problema a frontiera libera connesso a questioni di idraulica, *Ann. Mat. Pura Appl.* **92** (1972), 107—127.
2. Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media, *Proc. Int. Congr. Math., Vancouver*, 1974, Vol. II, pp. 237—343. Canadian Math. Congress.
3. Problèmes à frontière libre et inéquations variationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** (1976), 29—32.
4. Free boundary problems and variational inequalities, *SIAM Rev.*

Байокки, Капело (Baiocchi C., Capelo A.)

1. Disequazioni variazionali e quasi variazionali, Applicazioni a problemi di frontiera libera, I, II, Quaderni dell'U. M. I., Pitagora, Bologna (1978).

Бейран-да-Вейга (Beirao da Veiga H.)

1. Sulla Hölderianità della soluzioni di alcune disequazioni variazionali con condizioni unilaterale al bordo, *Ann. Mat. Pura Appl.* **83** (1969), 73—112.

Беллман (Bellman R.)

1. *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957. [Русский перевод: Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Мир, 1960.]

Бенсуссан, Лионс (Bensoussan A., Lions J.L.)

1. *Temps d'arrêt optimal et controle impulsionnel*, Vol. I, Dunod, Paris (1977).

Бенчи (Benci V.)

1. On a filtration problem through a porous membrane, *Ann. Mat. Pura Appl.* **100** (1974), 191—209.

Берестыцки, Брезис (Berestycki H., Brezis H.)

1. Sur certains problèmes de frontière libre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** (1976), 1091—1094.

Бернштейн С. Н.

1. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, — *ДАН СССР* **18**, 7 (1938), 385—388.

Берс (Bers L.)
1. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics.* Chapman, London, 1958.

Берс, Джон, Шехтер (Bers L., John F., Schechter M.)
1. *Partial Differential Equations.* Wiley (Interscience), New York, 1962. [Русский перевод: Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.]

Браудер (Browder F.)
1. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), 780—785.
2. On a theorem of Beurling and Livingston, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 367—372.

Брезис (Brezis H.)
1. Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures Appl.* **51** (1972), 1—168.
2. Multiplicateur de Lagrange en torsion elastroplastique, *Arch. Rational Mech. Anal.* **41** (1971), 254—265.
3. Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non-linear partial differential equations, *in Contributions to Non Linear Functional Analysis* (E. Zarantonello, ed.) pp. 101—156. Academic Press, New York, 1971.

Брезис, Дюво (Brezis H., Duvaut G.)
1. Ecoulement avec sillage autour d'un profile symétrique sans incidence, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 875—878.

Брезис, Киндерлерер (Brezis H., Kinderlehrer D.)
1. The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities, *Indiana J. Math.* **23** (1974), 831—844.

Брезис, Киндерлерер, Стампаккья (Brezis H., Kinderlehrer D., Stampacchia G.)
1. Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue, *C. R. A. S. Paris* **287** (1978), 711—714.

Брезис, Стампаккья (Brezis H., Stampacchia G.)
1. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 153—180.
2. The hodograph method in fluid-dynamics in the light of variational inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* **61** (1976), 1—18.
3. Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 129—132.
4. Remarks on some fourth order variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **4** (1977), 363—371.

Брезис, Эванс (Brezis H., Evans L.)
1. A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* **71** (1979), 1—13.

Вергара-Кафарелли (Vergara-Caffarelli G.)
1. Su un problema al contorno con vincoli per operatori differenziali ordinari, *Boll. Un. Mat. Ital.* **4** (1970), 566—584.
2. Regolarità di un problema di disequazioni variazionali relativo a due membrane, *Rend. Acad. Lincei* **50** (1971), 659—662.
3. Variational Inequalities for Two Surfaces of Constant Mean Curvature, *Arch. Rational Mech. Anal.* **56** (1974), 334—347.
4. Superficie con curvatura media assegnata in L_p; Applicazioni ad un problema di disequazioni variazionali, *Boll. Un. Mat. Ital.* **8** (1973), 261—277.

Вилладжо (Villaggio P.)
1. Monodimensional solids with constrained solutions, *Meccanica* 2 (1967), 65—68.
2. Stability conditions for elastic-plastic Prandtl—Reuss solids, *Meccanica* **2** (1968), 46—47.

Вишик М. И.
1. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму. — Труды Моск. Мат. об-ва (1963), 12, с. 125—184.

Гарабедян (Garabedian P.)
1. *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964

Герхард (Gerhardt C.)
1. Hypersurfaces of prescribed mean curvature over obstacles, *Math. Z.* **133** (1973), 169—185.
2. Regularity of solutions of nonlinear variational inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* **52** (1973), 389—393.

Де Джорджи (De Giorgi E.)
1. Sulla differenziabilità e analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino* **3** (1957), 25—43. [Русский перевод: Де Джорджи Е. О дифференцируемости и аналитичности экстремалей кратных регулярных интегралов. — *Математика*, сб. пер. (1960), **4** : 6, с. 23—38.]

Джакуинта, Пепе (Giaquinta M., Pepe L.)
1. Esistenza e regolarità per il problema dell'area minima con ostacoli in *n* variabili, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **25** (1971), 481—507.

Джусти (Giusti E.)
1. Minimal surfaces with obstacles, CIME course on Geometric Measure Theory and Minimal Surfaces, Edizioni Cremonese, Rome, pp. 119—153 (1973).

Дюво (Duvaut G.)
1. Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace à zéro degré), *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 1461—1463.

Дюво, Лионс (Duvaut G., Lions J. L.)
1. *Les Inequations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972. [Русский перевод: Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.]

Иорданов (Iordanov I. V.)
1. Problème non-coercif pour une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes, *Serdica* **1** (1975), 261—268.

Каприц, Чиматти (Capriz G., Cimatti G.)
1. On some singular perturbation problems in the theory of lubrication, *Appl. Math. Optim.* **4** (1978), 285—297.

Карамардян (Karamardian S.)
1. The complementarity problem, *Math. Programming* **2** (1972), 107—129.

Каратеодори (Carathéodory C.)
1. *Conformal Representation*. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1932. [Русский перевод: Каратеодори К. Конформное отображение. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.]

Кафарелли (Caffarelli L.)
1. The smoothness of the free surface in a filtration problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1976), 77—86.
2. The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math.* **139** (1978), 155—184.
3. Further regularity in the Signorini problem.

Кафарелли, Ривьере (Caffarelli L. A., Rivière N. M.)
1. On the rectifiability of domains with finite perimeter, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **3** (1976), 177—186.
2. Smoothness and analyticity of free boundaries in variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **3** (1976), 289—310.
3. Asymptotic behavior of free boundaries at their singular points, *Ann. Math.* **106** (1977), 309—317.
4. On the Lipschitz character of the stress tensor when twisting an elastic plastic bar, *Arch. Rational Mech. Anal.* **69** (1979), 31—36.

Кафарелли, Фридман (Caffarelli L. A., Friedman A.)
1. The obstacle problem for the biharmonic operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **6** (1979), 151—184.
2. The one phase Stefan problem and the porous medium equation: Continuity of the solution in *n* space dimensions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **75** (1978), 2084.

Киндерлерер (Kinderlehrer D.)
1. Variational inequalities with lower dimensional obstacles, *Israel J. Math.* **10** (1971), 339—348.

2. The coincidence set of solutions of certain variational inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* **40** (1971), 231—250.
3. How a minimal surface leaves an obstacle, *Acta Math.* **130** (1973), 221—242.
4. The free boundary determined by the solution as a differential equation, *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 195—208.
5. Variational inequalities and free boundary problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 7—26.

Киндерлерер, Ниренберг (Kinderlehrer D., Nirenberg L.)
1. Regularity in free boundary value problems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser.* IV **4** (1977), 373—391.
2. The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan Problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 257—282.
3. Analyticity at the boundary of solutions of nonlinear second-order parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 283—338.

Киндерлерер, Ниренберг, Шпрук (Kinderlehrer D., Nirenberg L., Spruck J.)
1. Régularité dans les problèmes elliptiques à frontière libre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **286** (1978), 1187—1190.
2. Regularity in elliptic free boundary problems, I, *J. d'Analyse Math.* **34** (1978), 86—119.
3. Regularity in elliptic free boundary problems, II, *Annali della SNS* (to appear).

Киндерлерер, Стампаккья (Kinderlehrer D., Stampacchia G.)
1. A free boundary problem in potential theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **25** (1975), 323—344.

Киндерлерер, Шпрук (Kinderlehrer D., Spruck J.)
1. The shape and smoothness of stable plasma configurations, *Annali della SNS* **5** (1978), 131—148.

Копполетта (Coppoletta G.)
1. A remark on existence and uniqueness in the theory of variational inequalities, *Boll. Un. Mat. Ital.* (to appear).

Курант, Гильберт (Courant R., Hilbert D.)
1. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Partial Differential Equations, especially p. 350. Wiley (Interscience), New York, 1962. [Русский перевод: Курант Р. Уравнения с частными производными — М.: Мир, 1964.]

Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.
1. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.
1. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.

Леви (Lewy H.)
1. A priori limitations for the solutions of the Monge-Ampère equations, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 365—374. [Русский перевод: Леви Г. Априорные ограничения для решений уравнений Монжа — Ампера. — *УМН*, **3** (1948), 2, с. 191—215.]
2. On the boundary behavior of minimal surfaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **37** (1951), 103—110. MR 14, 168.
3. A note on harmonic functions and a hydrodynamical application, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 11—113.
4. On minimal surfaces with partially free boundary, *Comm. Pure Appl. Math.* **4** (1952), 1—13, MR 14, 662.
5. On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 37—58.
6. On a variational problem with inequalities on the boundary, *Indiana J. Math.* **17** (1968), 861—884.
7. The nature of the domain governed by different regimes, Atti del Convegno Internazionale Metodi valutativi nella fisicamatematica, *Accad. Naz. Lincei* (1975), 181—188.
8. On the coincidence set in variational inequalities, *J. Diff. Geom.* **6** (1972), 497—501.

9. Inversion of the obstacle problem and explicit solutions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (to appear).

Леви, Стампаккья (Lewy H., Stampacchia G.)

1. On the regularity of the solution of a variational inequality, *Comm. pure Appl. Math.* **22** (1969), 153—188.
2. On existence and smoothness of solutions of some noncoercive variational inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* **41** (1971), 241—253.

Лере, Лионс (Leray J., Lions J. L.)

1. Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 97—107.

Лионс (Lions J. L.)

1. Some remarks on variational inequalities, *Proc. Tokyo Conf. Functional Anal. Appl., Tokyo* (1969), 269—281.

Лионс, Мадженес (Lions J. L., Magenes E.)

1. *Problèmes aux Limites non Homogènes*, Vols. I. II, III. Dunod, Paris, 1968—1970. (*English transl.:* Springer, New York, 1972.) [Русский перевод: Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.]

Лионс, Стампаккья (Lions J. L., Stampacchia G.)

1. Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 493—519.

Литтман, Стампаккья, Вайнбергер (Littman W., Stampacchia G., Weinberger H.)

1. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **17** (1963), 43—77. [Русский перевод: Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. — *Математика*, сб. пер. (1956), **9** : 2, с. 72—97.]

Мадженес (Magenes E.)

1. Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems, *Proc. NATO Adv. Study Inst., Liège* (1976).

Манчино, Стампаккья (Mancino O., Stampacchia G.)

1. Convex programming and variational inequalities, *J. Opt. Theory Appl.* **9** (1972), 3—23.

Масси (Massey W. S.)

1. *Algebraic Topology, An Introduction*. Springer, New York, 1967. [Русский перевод: Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. — М.: Мир, 1977, с. 7—278.]

Маццоне (Mazzone S.)

1. Existence and regularity of the solution of certain nonlinear variational inequalities with an obstacle, *Arch. Rational Mech. Anal.* **57** (1974), 115—127.
2. Un problema di disequazioni variazionali per superficie di curvatura media assegnata, *Boll. Un. Mat. Ital.* **7** (1973), 318—329.

Мерти, Стампаккья (Murthy M. K. V., Stampacchia G.)

1. A variational inequality with mixed boundary conditions, *Israel J. Math.* **13** (1972), 188—224.

Минти (Minty G. J.)

1. Monotone (non linear) operators in Hilbert space, *Duke Math. J.* **29** (1962), 341—346.
2. On a «monotonicity» method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **50** (1963), 1038—1041.

Миранда К. (Miranda C.)

1. *Su un problema di frontiera libera* (*Symp. Math.* II), pp. 71—83. Academic Press, New York, 1969.

Миранда М. (Miranda M.)

1. Distribuzioni aventi derivate misure: insieme di perimetro localmente finito, *Ann. Scuola Norm. Pisa* **18** (1964), 27—56.
2. Frontiere minimali con ostacoli, *Ann. Un. Ferrara* **XVI.2** (1971), 29—37.

Моро (Moreau J. J.)

1. Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation, *J. Mécanique* **5** (1966), 439—470.

Морри (Morrey C. B., Jr.)

1. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer, New York, 1966.
Рокафеллар (Rockafellar R. T.)
1. *Convex Analysis.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersy, 1970. [Русский перевод: Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.]
Сарантонелло (Zarantonello E. H.)
1. Solving functional equations by contractive averaging, Tech. Rep. 160, Math. Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wisconsin (1960).
Серрин (Serrin J.)
1. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.* A **264** (1969), 413—496.
Скиаффино, Троянелло (Schiaffino A., Troianiello G.)
1. Su alcuni problemi di disequazioni variazionali per sistemi variazionali ordinari, *Boll. Un. Mat. Ital.* **3** (1970), 76—103.
Стампаккья (Stampacchia G.)
1. On some regular multiple integral problems in the calculus of variations, *C. P. A. M.* **16** (1963), 383—421.
2. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **15** (1965), 189—258.
3. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **258** (1964), 4413—4416.
4. Variational inequalities, theory and applications of monotone operators, *Proc. NATO Adv. Study Inst., Oderisi—Gubbio* (1969).
5. Variational inequalities, *Proc. Internat. Congr. Math., Nice* (1970), 877—883.
6. О фильтрации жидкости через пористую среду с переменным поперечным сечением. — *УМН* **29** (1974), вып. 4, с. 89—101.
7. Su una disequazione variazionale legata al comportamento elastoplastico delle travi appoggiate agli estremi, *Boll. Un. Mat. Ital.* **11** (4) (1975), 444—454.
8. Le disequazioni variazionali nella dinamica dei fluidi, Atti del convegno Internazionale, «Metodi valutativi nella fisica-matematica», *Accad. Naz. Lincei* (1975), 169—180.
Стампаккья, Виньоли (Stampacchia G., Vignoli A.)
1. A remark on variational inequalities for a second order nonlinear differential operator with non-Lipschitz obstacles, *Boll. Un. Mat. Ital.* **5** (1972), 123—131.
Стейн (Stein E. M.)
1. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970. [Русский перевод: Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.]
Темам (Temam R.)
1. A non-linear eigenvalue problem: the shape at equilibrium of a confined plasma, *Arch. Rational Mech. Anal.* **60** (1975), 51—73.
2. Remarks on a free boundary problem arising in plasma physics, *Comm. Partial Differential Equations* **2** (1977), 563—585.
Тинг (Ting T. W.)
1. Elastic-plastic torsion, *Arch. Rational Mech. Anal.* **24** (1969), 228—244.
Томарелли (Tomarelli F.)
1. Un problème de fluidodynamique avec les inéquations variationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **286** (1978), 999—1002.
Фикера (Fichera G.)
1. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. Ia* (8) **VII** (1963—1964), 91—140.
Фрезе (Frehse J.)
1. On the regularity of the solution of a second order variational inequality, *Boll. Un. Mat. Ital.* **6** (1972), 312—315.
2. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality, *Manuscripta Math.* **9** (1973), 91—103.
3. Two dimensional variation problems with thin obstacles, *Math. Z.* **143** (1975), 279—288.

4. On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **4** (1977), 343—362.

Френкель, Бергер (Fraenkel L., Berger M.)

1. A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid, *Acta Math.* **132** (1974), 13—51.

Фридман (Friedman A.)

1. On the regularity of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations, *J. Math. Mech.* **7** (1958), 43—60.
2. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964. [Русский перевод: Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.]
3. The Stefan problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **133** (1968), 51—87.
4. Analyticity of free boundary for the Stefan problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* **61** (1976), 97—125.
5. On the free boundary of a quasi variational inequality arising in a problem of quality control, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).

Фридман, Йенсен (Friedman A., Jensen R.)

1. Convexity of the free boundary in the Stefan problem and in the dam problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* **67** (1977), 1—24.

Фридман, Киндерлерер (Friedman A., Kinderlehrer D.)

1. A one phase Stefan problem, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1975), 1005—1035.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

1. Über ein Minimumproblem für Potentialstromungen mit freiem Rande, *Math. Ann.* **109** (1934), 60—82.

Хартман, Уинтнер (Hartman P., Wintner A.)

1. On the local behavior of non parabolic partial differential equations, *Amer. J. Math.* **85** (1953), 449—476.

Хартман, Стампаккья (Hartman P., Stampacchia G.)

1. On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Math.* **115** (1966), 153—188.

Чиматти (Cimatti G.)

1. On a problem of the theory of lubrication governed by a variational inequality, *Appl. Math. Optim.* **3** (1977), 227—242.

Шамир (Shamir E.)

1. Regularisation of mixed second order elliptic problems, *Israel J. Math.* **6** (1968), 150—168.

Шварц (Schwarz L.)

1. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.

Шеффер (Schaeffer D.)

1. A stability theorem for the obstacle problem, *Adv. in Math.* **17** (1975), 34—47.
2. A new proof of the infinite differentiability of the free boundary in the Stefan problem, *J. Differential Equations* **20** (1976), 266—269.
3. Some examples of singularities in a free boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Cl. Sci. (4) **1** (1977), 133—144.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

)
4
3
)
1

2

2
5
7
5
7

1
6
8
9

1

1
2
6
7
9
5
0
1

84

84
84
88
94

00
06
12

15
23
25
26

28

28
230
237
244
245
246
253

Д. Киндерлерер
Г. Стампаккья